Составители:

Гильдерман С.А., Григорьева Н.В., Изотова С.А., Полуянова М.Ф.

Утверждено на заседании кафедры высшей математики 28.04.2011г

Методические указания к расчетно-графической работе №1.1

1. Основные понятия математической логики.

1.1 Алгебра логики (алгебра высказываний, логика высказываний).

Определение 1. Построение из данных высказываний нового высказывания называется логической операцией. Знаки логических операций называются логическими связками.

Определение 2. Отрицание высказывания А (т.е. не А) обозначается $\neg A$, или $\bar{A}$.

Обозначения логических операций

	Обозначение логической операции	Другое обозначение	Название логической операции и связки	Как читается выражение, приведенное в первом столбце
1	$A_1 \Lambda A_2$	$A_1 \cdot A_2$; $mim\,(A_1,A_2)$	Логическое умножение, логическое «и»	A_1иA_2
2	$A_1 V A_2$	A_1+A_2 ; $max(A_1,A_2)$	Логическое сложение, логическое «или»	A_1илиA_2
3	$A_1 \to A_2$	$A_1 \supset A_2$; $A_1 \Rightarrow A_2$	Логическое следование	Если A_1 то A_2 ; A_1 влечет A_2
4	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \dot{V} A_2$; $A_1 \Delta A_2$	Разделительное «или»	A_1 плюс A_2 ; либо A_1, либо A_2
5	$A_1 \sim A_2$	$A_1 \equiv A_2$; $A_1 \leftrightarrow A_2$	Эквивалентность; равнозначность; тождественность	A_1 тогда и только тогда, когда A_2 ; A_1 эквивалентно A_2
6	$A_1 ! A_2$		Штрих Шеффера	Неверно, что A_1 и A_2
7	$A_1 \downarrow A_2$	$A_1 \circ A_2$; $A_1 \overline{V} A_2$	Стрелка Пирса	Ни A_1 ни A_2

Для формулировки теорем на логико-математическом языке в рассмотрение вводятся также следующие кванторы:

1) квантор всеобщности: (обозначение $\forall$, читается «для всех…»);
2) Квантор существования (обозначение $\exists$, читается «существует …»).

1.2 Множества, операции над множествами, отображения

Определение 3. Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами множества.

Если a – элемент множества М, то это обозначают так: $a \in M$.

Для обозначения того, что a не является элементом множества М применяют запись: $a \overline{\in} M$ или $a \notin M$.

Определение 4. Два множества А и В равны (А=В), если они содержат одни и те же элементы, т.е. $A=B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Определение 5. Множество всех объектов, обладающих свойством $H(x)$, обозначают через $\{x \mid H(x)\}$ или $\{x : H(x)\}$

Определение 6. Если все элементы множества А являются также элементами множества В, то говорят, что А содержится (или включается) в В и обозначают это так: $A \subseteq B$.

Определение 7. Если $A \subseteq B$ то множество А называется подмножеством множества В; если к тому же $A \neq B$, то А называют собственным подмножеством множества В и применяют запись $A \subset B$. Отношения $\subseteq$ и $\subset$ между множествами называются соответственно включением и собственным включением.

Между включением и равенством множеств существует связь, отраженная в следующем соотношении: $A=B \leftrightarrow (A \subseteq B) \Lambda (B \subseteq A)$.

Определение 8. Объединение $A \cup B$ множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Пересечение $A \cap B$ множеств A и B есть множество, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B.

Определение 9. Разность $A \setminus B$ множеств A и B есть множество, состоящее из таких элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

Симметричная разность $A \Delta B$ множеств A и B представляет собой множество, состоящее из элементов, принадлежащих в точности одному из множеств A и B, т.е. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Определение 10. Если $A \subseteq E$ то дополнение $C_E A$ множества A относительно множества E определяется так $C_E A = E - A$

Определение 11. Отображением множества A в множество B (функцией на A со значениями в B) называется правило, по которому каждому элементу множества A сопоставляется один или несколько элементов множества B. Для обозначения отображения f множества A в множество B используется запись $f: A \to B$

Если $x \in A$, то множество всех элементов из B, сопоставляемых при отображении f элементу x, обозначается через $f(x)$ и называется образом элемента x.

Образом подмножества A_1 множества A при отображении f (обозначение $f(A_1)$) называется объединение образов всех элементов x из A_1. При этом $f(A)$ называется областью значений отображения f.

Если $y \in B$, то его полным прообразом при отображении f (обозначение $f^{-1}(y)$) называется множество всех элементов из A, которым при отображении f сопоставляется элемент y.

Всякий элемент из $f^{-1}(y)$ называется прообразом элемента y при отображении f.

Если при отображении $f: A \to B$ каждому элементу из A сопоставляется в точности один элемент из B, то отображение f называется однозначным. Отображение, не являющееся однозначным, называется многозначным.

Пример 1 (Задание 1). Указать, какое отображение $f_1=2x+1$ или $f_2={}^1/_x+1$, является линейным и найти образ отрезка [0;1] при выбранном отображении.

Решение: Отображение $f_1=2x+1$ является линейным, т.к. функция $f_1(x)=2x+1$ линейная при $\forall$ x. При этом $f_1:[0;1] \to [1;3]$.

Таким образом, отрезок [1;3] является образом [0;1] при отображении f_1.

2. Натуральные (N), целые (Z), рациональные (Q), действительные (R), комплексные (C) числа.

Напомним определения выше обозначенных множеств ***N, Z, Q, R, C***, так как они могут быть использованы при решении некоторых задач, сформулированных в данной работе.

2.1 Множества N, Z, Q и R.

Определение 12. Число, соответствующее любой точке на числовой прямой, называется действительным.

Таким образом, числа натуральные, целые, рациональные и иррациональные составляют множество действительных чисел R.

Определение 13. N (натуральные) – это числа, полученные путем последовательного прибавления 1, начиная с 1.

$N \subset R$ и обладает следующими свойствами:

1. $1 \in N$
2. из $n \in N$ следует $(n+1) \in N$
3. Если $n \in N$ то $(n-1) \in N$ тогда и только тогда, когда $n \neq 1$

Определение 14. Действительное число g называется целым, если существуют натуральные числа n и m, такие что g=n-m. Множество целых чисел обозначается Z

Частное от деления целых чисел не всегда есть целое число.

Определение 15. Действительное число a называется рациональным, ($a \in Q$), если существуют такие целые числа g_1 и g_2 ($g_2 \neq 0$), что $a = \frac{g_1}{g_2}$.

В противном случае число a называется иррациональным.

Множество рациональных чисел обозначается Q. Любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Определение 16. Действительное число, которое можно выразить в форме бесконечной непериодической десятичной дроби называется иррациональным. Множество иррациональных чисел обозначим Ir.

Пример 2(Задание 2). Установить соответствие между заданными числами x_1, x_2, x_3 и множествами A, B, D, E, K, заданными следующим образом: $x_1=2$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-4$;

$A=\{x \in N| -1<x<3\}$,
$B=\{x \in R \setminus Q| -4<x<2\}$,
$D=\{x \in Z| -5<x<1{,}5\}$,
$E=\{x \in N| -5<x<2\}$,
$K=\{x \in Q| -4<x<2\}$,

Решение. $x_1 \in A$, так как $x_1=2$ – является натуральным числом и $x_1=2 \in (-1;3)$;
$x_1=2 \notin B$, т.к. множество B состоит из иррациональных чисел;
$x_1 \notin D$, т.к. D состоит из целых чисел, расположенных на интервале (-5; 1,5);
$x_1=2 \notin E$, $x_1=2 \notin K$, т.к. множества E и K состоят соответственно из натуральных и рациональных чисел $x<2$.

Докажем далее, что $x_2=\sqrt{3} \in B$. Во-первых, $x_2=\sqrt{3} \notin A$, $x_2 \notin D$, $x_2 \notin E$, $x_2 \notin K$, так как $x_2=\sqrt{3}$ - иррациональное число и следовательно не является натуральным, целым или рациональным числом. Во-вторых, множество B состоит из чисел, дополняющих множество Q (рациональных чисел) до множества R (действительных чисел) на интервале $x \in (-4; 2)$. Следовательно, множество B состоит из иррациональных чисел $x \in (-4; 2)$. Так как иррациональное число $x_2=\sqrt{3} \in (-4; 2)$, то $x_2=\sqrt{3} \in B$.

Аналогично доказывается, что целое отрицательное число $x_3=-4 \in D$.

Ответ к примеру 2: $x_1=2 \in A$; $x_2=\sqrt{3} \in B$; $x_3=-4 \in D$.

2.2 C – множество комплексных чисел.

Определение 17. Пусть α и β – любые действительные числа. Тогда число $a=\alpha+i\beta$ называется комплексным числом (в алгебраической форме).

В этом определении символ i имеет специальное название – мнимая единица (по правилу $i^2=-1$)

Определение 18. Число α называется действительной частью комплекс-ного числа, β называется коэффициентом при мнимой части.

Обозначим $\alpha = R(a)$, $\beta=I(a)$. Если $\beta=0$, то $a=\alpha$ (действительные числа – частный случай комплексных чисел).

2.3 Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Подобно тому, как действительные числа могут быть изображены точками числовой прямой, комплексные числа изображают точками плоскости: число $a=\alpha+i\beta$ изображается точкой с абсциссой α и ординатой β. Действительные числа изображаются точками на оси абсцисс (действительная ось), чисто мнимые - точками на оси ординат (мнимая ось). Так как каждая точка плоскости вполне определяется радиус-вектором этой точки, то каждому комплексному числу соответствует определенный вектор, лежащий в плоскости и идущий из полюса в точку соответствующую комплексному числу.

Таким образом, комплексные числа могут изображаться как точками $A(\alpha;\beta)$, так и векторами $\overline{OA}$.

2.4 Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Определение 19. ρ – длина радиус-вектора $\overline{OA}$, соответствующая числу $a=\alpha+i\beta$ точки комплексной плоскости, называется модулем или абсолютной величиной комплексного числа a (обозначается $|a|=\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$).

Определение 20. Аргументом комплексного числа $a=\alpha+i\beta$ (Arg a) называют угол φ (в радианах) между радиус-вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением действительной оси с точностью до 2π. Главное значение аргумента: arg $a=\varphi_0$, $-\pi<\varphi_0\le\pi$; имеем $Arg\ a=arg\ a+2k\pi$.

Пример 3. Найти arg (1+i)

Решение. $|1+i|=\sqrt{2}$. Т.к. $\alpha=1$ и $\beta=1$, $\alpha=\rho\cos\varphi_0$, $\beta=\rho\sin\varphi_0$, $\varphi_0=arctg\dfrac{\beta}{\alpha}=arctg1={}^{\pi}/_{4}$.

Определение 21. Тригонометрической формой комплексного числа $a=\alpha+i\beta$ с модулем $\rho=|\alpha|$ и аргументом φ называется следующая форма записи комплексного числа $a=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Пример 4. Записать число $a=1+i$ в тригонометрической форме.

Решение. Так как $\rho=|\alpha|=\sqrt{2}$, $\varphi=\arg a={}^{\pi}/_{4}$, то $a=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

Определение 22. Показательной формой комплексного числа $a=\alpha+i\beta$ с модулем $\rho=|\alpha|$ и аргументом φ называется следующая форма записи $a=\rho e^{i\varphi}$

Пример 5. Записать комплексное число $a=1+i\sqrt{3}$ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение. Так как $\rho=|\alpha|=\sqrt{1+3}=2$, $\varphi_0=arctg\dfrac{\beta}{\alpha}=arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1}={}^{\pi}/_{3}$.

Алгебраическая форма: $a=1+i\sqrt{3}$;

Тригонометрическая форма: $a=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

Показательная форма: $a=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2.5 Арифметические действия над комплексными числами.

Определения 23.

1) Равенство $a_1+ib_1=a_2+ib_2$ двух комплексных чисел возможно тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

2) Сложение двух комплексных чисел осуществляется по правилу: $(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$.

3) Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу многочленов но с заменой $i^2=-1$:

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

4) Числа вида $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$, отличающиеся лишь знаком при мнимой части называются комплексно сопряженными.

5) Сумма и произведение комплексно сопряженных чисел – всегда число действительное: $(a+ib)+(a-ib)=2a$; $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

6) Деление комплексных чисел $\dfrac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$ при $a+ib\neq0$ всегда возможно и осуществляется с помощью умножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное делителю:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

Пример 6. $(3+2i)+(1+i)=(3+1)+i(-2+1)=4-i$

Пример 7. $(6+2i)(3-4i)=(18+8)+i(6-24)=26-18i$

Пример 8 (Задание 3). Вычислить в алгебраической форме

$$z=\frac{(-1+5i)^2(3-4i)}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i}=\frac{(1-10i-25)(3-4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+\frac{(10+7i)(-i)}{5i(-i)}=$$

$$=\frac{-2(12+5i)(3-13i-12)}{10}+\frac{7-10i}{5}=\frac{43+201i}{5}+\frac{7-10i}{5}=10+38{,}2i$$

3. Предел функции

Перечислим основные свойства предела функции, благодаря которым задача отыскания пределов существенно облегчается.

1. $\lim\limits_{x\to a}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a}f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
4. если $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$;

В приведенных выше равенствах предполагается, что все пределы существуют. Предельная точка a может быть как действительным числом, так и $+\infty$ или $-\infty$.

При отыскании пределов функций часто возникает ситуация, когда невозможно напрямую применить вышеперечисленные свойства. Это может быть связано с тем, что в равенствах 1) - 4) некоторые пределы не существуют. Например

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}\neq\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}x+1}{\lim\limits_{x\to+\infty}x-1},$$

так как пределы в числителе и знаменателе справа не существуют. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность и возникает задача раскрытия неопределенности.

Чаще всего при отыскании пределов встречаются следующие типы неопределенностей: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0. Рассмотрим некоторые методы раскрытия неопределенностей.

3.1 Неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Отношение многочленов

Неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ возникает при вычислении предела дроби, когда предел числителя и предел знаменателя равны нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=?,\ \text{где}\ \lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Если f(x) и g(x) — многочлены, то для раскрытия такой неопределенности следует представить функции f(x) и g(x) в виде

$$f(x)=(x-a)^{k_1}f_1(x),\quad g(x)=(x-a)^{k_2}g_1(x),$$

с такими $k_1, k_2 \geq 1$, что $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} g_1(x)\neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^{k_1}f_1(x)}{(x-a)^{k_2}g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{k_1-k_2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} g_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{k_1-k_2}=\begin{cases}0 & при \quad k_1>k_2;\\ A & при \quad k_1=k_2;\\ \infty & при \quad k_1<k_2;\end{cases}\text{ где } A=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_2(x)}.$$

Пример 9 (задание 4). Найти предел функции

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+x-5}{2x^2-x-1}.$$

Решение. При x=1 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Для выделения множителя (x — 1) будем использовать алгоритм деления многочленов. Разделим числитель и знаменатель на x — 1 (см. рис.1)

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+x-5 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ x^3-x^2 & x^2+4x+5 \\ \hline 4x^2+x-5 & \\ -\ 4x^2-4x & \\ \hline 5x-5 & \\ -\ 5x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2x^2-x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ 2x^2-2x & 2x+1 \\ \hline x-1 & \\ -\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Рис.1

Таким образом $\quad x^3+3x^2+x-5=(x-1)(x^2+4x+5),$
$\quad 2x^2-x-1=(x-1)(2x+1),$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2+x-5}{2x^2-x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4x+5)}{(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{10}{3}.$$

3.2 Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Отношение многочленов.

Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ возникает при вычислении предела дроби, когда числитель и знаменатель стремятся к бесконечности

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=?\text{, где }\lim_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a} g(x)=\infty.$$

Случай, когда a - конечное действительное число сводится к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, рассмотренной выше. Достаточно ввести функции $f_1(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ и $g_1(x)=\dfrac{1}{g(x)}$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{f_1(x)},$$

где $\lim\limits_{x\to a} g_1(x)=0 \quad \lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$

Рассмотрим случай, когда $a=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=?\text{, где }\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty.$$

Представим функции в числителе и знаменателе в следующем виде

$$f(x)=h_1(x)f_1(x),\quad g(x)=h_2(x)g_1(x),$$

где $\lim\limits_{x\to\infty} h_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} h_2(x)=\infty$ а пределы $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g_1(x)$ существуют и являются конечными действительными числами. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}==\lim_{x\to\infty}\frac{h_1(x)f_1(x)}{h_2(x)g_1(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{h_1(x)}{h_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g_1(x)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{h_1(x)}{h_2(x)}.$$

В рассматриваемом случае при нахождении предела $\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h_1(x)}{h_2(x)}$ в дальнейшем возможно также использование правила Лопиталя, см. §5.3 данной работы

Пример 10 (Задание 5). Предел рациональной функции вычисляется следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, & при \quad m<n\\ \dfrac{a_m}{b_m}, & при \quad m=n\end{cases}\text{, где } a_m\neq 0 \text{ и } b_n\neq 0.$$

Решение. Выделим в числителе и знаменателе множители $h_1(x)=x^m$ и $h_2(x)=x^n$

Получаем: $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m(a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\ldots+a_0\frac{1}{x^m})}{x^n(b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\ldots+b_0\frac{1}{x^n})}=\frac{a_m}{b_n}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{m-n}=\begin{cases}0, & при \quad m<n\\ \dfrac{a_m}{b_m}, & при \quad m=n\end{cases}.$$

3.3 Неопределенности типа $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$. Общий случай.

Для отыскания пределов функций вида $f(\sin x, \cos x, x)$ (здесь f — некоторая функция) может быть использован **первый замечательный предел**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0, когда $x\to 0$. В этом случае говорят, что они являются бесконечно малыми величинами в окрестности 0.

Определения 24. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то f(x) называется *бесконечно малой величиной в окрестности точки a* (или при $x\to a$). Две бесконечно малые величины $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми величинами в окрестности точки a, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

и это обозначается следующим образом: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Таким образом, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 11 (Задание 6). Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}.$$

Решение. Здесь имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Очевидно, что

$$tg\,x \sim x, \text{ и } 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} \text{ при } x \to 0.$$

Тогда числитель дроби $tg\,x - \sin x = tg\,x\,(1-\cos x) \sim x\cdot\frac{x^2}{2} = 0.5x^3$ при $x \to 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{0.5x^3}{x^3} = 0.5$.

3.4 Неопределенность типа 1^∞.

Для разрешения неопределенности типа 1^∞ может быть использован в комбинации с уже рассмотренными методами **Второй замечательный предел.**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

где $e \approx 2{,}71828182845...$.

Пример 12. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}.$$

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x) = 1,$$

то в основании $\sin x$ можно выделить 1 и бесконечно малое слагаемое: $\sin x = 1 + y$, где $y = \sin x - 1$ и $y \to 0$ при $x \to \pi/2$. Преобразуем показатель исходного выражения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x} = \lim_{y\to 0}((1+y)^{\frac{1}{y}})^{y\,tg^2 x}.$$

Поскольку $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x} = e^A$ где

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(y\cdot tg^2 x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x - 1)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Пример 13 (Задание 7). Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\ln\left(\frac{2x}{2x-1}\right).$$

Решение. При отыскании данного предела возникает неопределенность типа $\infty\cdot 0$, которая сводится к неопределенности типа 1^∞ внесением множителя (x + 1) под знак логарифма

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\ln\left(\frac{2x}{2x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{x+1} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{x+1} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{x+1} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x-1}\right)^{\frac{x+1}{2x-1}} = \ln e^A,$$

где $A = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}$.

3.5 Неопределенность типа $\infty-\infty$.

Если эта неопределенность получается разностью дробей со знаменателями, стремящимися к нулю ($\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$), то эту разность надо, приведя дроби к общему знаменателю, привести к одной дроби — неопределенности типа $\frac{0}{0}$.

Если же неопределенность типа $\infty-\infty$ получается разностью иррациональных выражений (корней), то выражение под знаком предела следует домножить и разделить на сопряженное.

Пример 14 (Задание 8). Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0;$$

4. Непрерывность и точки разрыва функции.

4.1 Непрерывность функции.

Определение 25. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Перечислим основные свойства непрерывных функций. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда

1. Функция $f(x)\pm g(x)$ непрерывна в точке x_0.
2. Функция $f(x)\cdot g(x)$ непрерывна в точке x_0.
3. Функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0, если $g(x_0)\neq 0$.
4. Для того, чтобы $y=f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ (где $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – приращение функции $f(x)$ в точке x_0).
5. Основные элементарные функции a^x, x^a, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$, $ctg\,x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\,x$, $arcctg\,x$ непрерывны во всех точках, где они определены.
6. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка $x=c$, в которой $f(x)$ обращается в нуль: $f(c)=0$, $a<c<b$.

7. непрерывная на отрезке $a \le x \le b$ функция достигает на этом отрезке по меньшей мере один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Пример 15. Решить, находится ли действительный корень $x_0=c$ уравнения $x^3+x^2+x-1=0$ на интервале $(a;b)=(^1/_2;1)$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(x)=x^3+x^2+x-1$, $f(x)$ непрерывна во всех точках числовой оси, в том числе и на отрезке $x\in[^1/_2;1]$ согласно свойствам 1-5 для непрерывных функций. Чтобы ответить на поставленный вопрос проверим выполнение свойства 6.

$$f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{8}<0,$$

$$f(b)=f(1)=(1)^3+(1)^2+1-1=2>0.$$

Следовательно $\exists \quad x_0=c \to f(c)=0; \quad \frac{1}{2}<c<1$. Это означает $x_0^3+x_0^2+x_0-1=0$, если $x_0=c$.

Ответ. Действительный корень ($x_0=c$) уравнения $x_0^3+x_0^2+x_0-1=0$ принадлежит интервалу $(^1/_2;1)$.

4.2 Точки разрыва функции.

Определение 26. Точка $x_0 \in R$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, x_0, если равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ не выполнено, т.е. либо $x_0 \notin D_f$ и значение $f(x_0)$ не определено, либо предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует, либо обе части равенства определены, но равенство между ними не имеет места.

Различают точки разрыва следующих двух типов:

1. x_0 – точка разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, причем если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ то разрыв устранимый;
2. x_0 является точкой разрыва второго рода для $y=f(x)$, если в этой точке выполняется хотя бы одно из следующих условий
   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
   $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty$
   $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$
   $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty$

Пример 16 (задание 9). Найти и указать характер точек разрыва функции $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.

Решение. По свойству 3 непрерывных функций, функция $f(x)$ непрерывна там и только там, где $\sin x\neq 0$, т.е. точками разрыва являются нули функции $\sin x$:

$$x_k = \pi k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При k=0 точка x_0 является точкой разрыва первого рода, поскольку предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ существует и равен 1 (см. первый замечательный предел). Следовательно, односторонние пределы существуют и конечны

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{x}{\sin x}=1, \qquad \lim_{x\to x_0+0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Все остальные точки разрыва $x_{\pm1}, x_{\pm2}, \ldots$ являются точками разрыва второго рода, поскольку односторонние пределы в них бесконечны. Действительно, рассмотрим, например, точку $x_1=\pi$.

$$\lim_{x\to\pi-0}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{+0}=+\infty, \qquad \lim_{x\to\pi+0}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{-0}=-\infty.$$

Следовательно, $x_1=\pi$ есть точка разрыва второго рода.

4.3 Асимптоты функции

Асимптоты бывают двух типов — вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные).

Вертикальные асимптоты. Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва, в которой хотя бы один односторонний предел бесконечен, то вертикальная прямая (параллельная оси ординат), проходящая через эту точку, называется вертикальной асимптотой. Функция может иметь бесконечно много вертикальных асимптот. Например, функция $tg\ x$ имеет следующие вертикальные асимптоты: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Наклонные асимптоты. Если следующие пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

существуют и конечны, то прямая, заданная уравнением $y=kx+b$, является наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x\to+\infty$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x\to-\infty$. Функция $f(x)$ может иметь не более двух наклонных асимптот (одна при $x\to+\infty$, а другая при $x\to-\infty$). Если первый предел $k=0$, то асимптота является горизонтальной.

Пример 17 (Задание 10). Найти асимптоты функции $f(x)=\frac{x}{1+e^{-x}}$

Решение. Поскольку $1+e^{-x}\neq 0$, то функция не имеет точек разрыва, и, следовательно, вертикальных асимптот нет.

Вычислим пределы

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=1$$

$$b_+=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+e^{-x}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-xe^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+e^{x}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=0$$

$$b_-=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+e^{x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

Следовательно, $y=x$ есть наклонная асимптота при $x\to+\infty$ и $y=0$ есть горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$.

5. Дифференцируемые функции.

5.1 Производная.

Определение 27. Если для $f(x)$ существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

То он называется производной функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $y'=f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}f(x)$. Операция отыскания производной называется дифференцированием этой функции.

Перечислим основные свойства производной

1. $(c)'=0$
2. $(cu)'=c(u)'$
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
4. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
6. Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, то $\left(f(\varphi(x))\right)'=f'(u)\cdot u'$

Таблица формул дифференцирования

1. $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
(α – любое действительное число)
2. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}u'$
3. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}u'$, (где $a>0$, $a\neq 0$)
4. $\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$
5. $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
6. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
9. $(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
10. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(arctgu)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
13. $(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
14. $(sh(u))'=ch(u)\cdot u'$
15. $(ch(u))'=sh(u)\cdot u'$
16. $(th(u))'=\dfrac{1}{ch^2 u}\cdot u'$
17. $(cth(u))'=-\dfrac{1}{sh^2 u}\cdot u'$

Пример 18. Найти y', если $y=2\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{x^2}$

Решение. $y'=\left(2\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)'=\left(2x^{\frac{1}{3}}+3x^{-2}\right)'=2\cdot\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3(-2)x^{-3}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{6}{x^3}$.

Пример 19. Найти y', если $y=x^3\cdot\cos x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения (4.) находим $y'=3x^2\cos x-x^3\sin x$.

Пример 20 (задание 11). Найти y', если $y=\left(x^2+5x+7\right)^8$

Решение. Полагая $u=x^2+5x+7$, имеем $y=u^8$. По формуле (1) таблицы дифференцирования имеем $y'=8u^7\cdot u'=8\left(x^2+5x+7\right)^7(x^2+5x+7)'=8\left(x^2+5x+7\right)^7(2x+5)$.

Определение 28. Производная от логарифма данной функции $y=f(x)$ называется логарифмической производной функции $f(x)$.

Обычная производная может быть выражена через логарифмическую

$$\frac{d}{dx}\ln\left|f(x)\right|=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{y'}{y},$$

$$y'=f(x)\frac{d}{dx}\ln\left|f(x)\right|.$$

Пример 21 (задание 12). Найти производные следующих функций:
1) $y=x^x$;
2) $y=x^{\ln x}$.

Решение. 1) $y'=x^x\left(\ln x^x\right)'=x^x\left(x\ln x\right)'=x^x\left(1+\ln x\right)$

2) $y'=x^{\ln x}\left(\ln x^{\ln x}\right)'=x^{\ln x}\left(\ln^2 x\right)'=x^{\ln x}\left(2\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^{\ln x}\ln x}{x}$.

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Уравнение нормали к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$\begin{cases} y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0), & если\quad f'(x_0)\neq 0\\ x=x_0, & если\quad f'(x_0)=0\end{cases}$$

Таким образом, геометрически производная есть тангенс угла наклона касательной в данной точке по отношению к оси x.

Пример 22 (Задание 13). Написать уравнения касательной и нормали к заданной в неявном виде кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$ в точке $(x, y)=(1, 4)$.

Решение. Если $y=f(x)$ — решение уравнения $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$, то подстановка этого решения в уравнение обращает его в тождественное равенство при всех допустимых значениях x. Приравняем производные по x левой и правой частей, учитывая, что $\sqrt{y}=\sqrt{f(x)}$ — сложная функция аргумента x:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{f(x)}\right)'=3'\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0\Leftrightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$$

Подставляя $x=1$ и $y=4$, получим $f'(1)=y'(1)=-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}=-2$.

Таким образом, уравнение касательной имеет вид:

$$y=f(1)+f'(1)\cdot(x-1),$$
$$y=-2x+6;$$

а уравнение нормали: $y=f(1)-\dfrac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)=4+\dfrac{1}{2}(x-1)$,

$$y=0.5x+3.5.$$

5.2 Производная функции, заданной параметрически

Если зависимость переменной y от x задана при помощи связывающего их параметра t:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

то производная $y'(x)$ находится по формуле

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=g(t)} = y'(x)\big|_{x=g(t)} = \frac{h'(t)}{g'(t)}.$$

Пример 23 (Задание 14). Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = 2cost$, $y = 3sint$ (точка $(x; y)$ находится на эллипсе $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$).

Решение. Первая производная находится непосредственно по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}ctgt.$$

Производная $y'(x)$ также зависит от x через параметр t, поэтому для нахождения ее производной надо опять использовать формулу параметрической производной. Введем для точного соответствия формуле обозначение для $y'(x)$: $z = y'(x) = -\frac{3}{2}ctgt$.

Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = (y'(x))' = z'(x)$. Производную $z'(x)$ вычисляем так же, как и производную $y'(x)$.

Если $y'(x) = -\frac{3}{2}ctgt$ то $z'(x) = \dfrac{\left(-\frac{3}{2}ctgt\right)'}{g'(t)} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}}{-2\sin t} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}$.

В итоге, получаем $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4\sin^3 t}$.

5.3 Правило Лопиталя

Пусть:

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, где a — действительное число или $\pm\infty$, всюду за исключением, быть может, самой точки a, причем, производные $f'(x)$ и $g'(x)$ одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$;

2. выполнено одно из следующих условий

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

3. существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

При помощи правила Лопиталя могут быть раскрыты неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Остальные типы неопределенностей сводятся к вышеупомянутым путем алгебраических преобразований и логарифмирования.

Пример 24 (Некоторые варианты заданий 6 и 8). Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot ctgx-1}{x^2}.$$

Решение. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot ctgx-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{ctgx-\frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{2x\sin^2 x}.$$

При нахождении предела дроби можно множитель в числителе или знаменателе заменить на эквивалентный. Заменим sin^2x на x^2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{2x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x - x}{2x^3}.$$

Применим правило Лопиталя еще три раза:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin 2x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{12x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

5.4 Производная функции комплексного переменного

Определение 29. Если каждому значению переменного $z=x+iy$ из множества D по правилу f сопоставляется определенное значение переменного $w=u+iv$ из множества E на комплексной плоскости W, то f называется комплексной функцией комплексного переменного z; D – область определения, E – область значений функции f. Обозначение $w=f(z)$**Определение 30**. Функция $w=f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется дифференцируемой в точке z_0, если существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

Этот предел называется производной $w=f(z)$ в точке z_0.

Обозначение: $f'(z_0)$, $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$.

Правила дифференцирования те же, что и для функций действительного переменного. Правило взятия производной для сложной функции тоже остается неизменным.

Пример 25 (Задание 15). Вычислить в алгебраической форме $\frac{dw}{dz}$ в точке $z_0=1+i$, $w=(3z+4)^3$

Решение. $w=(3z+4)^3$, $w=\hat{w}^3$, $\hat{w}=3z+4$. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\hat{w}}\cdot\frac{d\hat{w}}{dz} = 3\hat{w}^2\cdot 3 = 9(z+4)^2\Big|_{z_0=1+i} =$$

$$=9(3(1+i)+4)^2=9(7+3i)^2=9(49+42i-9)=360+378i.$$

6. Исследование поведения функции

6.1 Классификазия функций по характеру поведения

Определение 31. Пусть D – область определения функции $f(x)$, симметрична относительно начала координат. Тогда $f(x)$ называется четной, если $\forall x \in D$, $f(-x)=f(x)$; и $f(x)$ называется нечетной, если $\forall x \in D$, $f(-x)=-f(x)$.

Определение 32. Функция $f(x)$ называется периодической, если выполняется условие: $\exists T > 0$ такое, что $\forall x \in D$, и $x \pm T \in D$ выполняется

$$f(x \pm T)=f(x).$$

Минимальное число $T>0$, удовлетворяющее этому условию, называется периодом функции $f(x)$.

Пример 26 (Задание 16). Определить характер поведения следующих функций:

$1)\ f(x)=\dfrac{x^2}{1+\cos x};\quad 2)\ g(x)=x^3-\dfrac{1}{\sin x};\quad 3)\ h(x)=\sin x \cdot tgx.$

Решение. 1) Функция $f(x)$ четная, так как $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1+\cos(-x)}=\dfrac{x^2}{1+\cos x}=f(x)$.

2) Функция $g(x)$ нечетная, так как $g(-x)=(-x)^3-\dfrac{1}{\sin(-x)}=-x^3+\dfrac{1}{\sin x}=-g(x)$.

3) Функция $h(x)$ четная, так как $h(-x)=\sin(-x)\cdot tg(-x)=(-\sin x)\cdot(-tgx)=$ $=\sin x\cdot tgx=h(x)$; она периодическая, так как $h(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)\cdot tg(x+2\pi)=\sin x\cdot tgx=$ $h(x)$. Число $T=2\pi$ является периодом функции $h(x)$.

Определение 33. Функция $f(x)$, не являющаяся ни четной, ни нечетной, ни периодической называется функцией общего вида

Пример 27. Доказать, что функция $f(x)=e^x \sin x$ является функцией общего вида.

Решение. Заданная функция $e^x \sin x$ не является ни четной ни нечетной, так как $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}} \neq \pm e^{\frac{\pi}{2}}$

Докажем, что функция $f(x)=e^x \sin x$ не является периодической функцией.

Предположим от противного, что $\exists T>0$, $f(x+T)=f(x)$, $\forall x \in D=R$.

1) Если T кратно π, т.е. $T=k\pi$, где k – целое число, тогда $f\left(\dfrac{\pi}{2}+T\right)=e^{\frac{\pi}{2}+T}\sin(\dfrac{\pi}{2}+T)=(-1)^k e^{\frac{\pi}{2}+T}=(-1)^k e^T f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\neq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, так как $T>0$ и $e^T>1$.

2) Если T не кратно π, то $\sin T\neq 0$. Следовательно $f(0+T)=e^T \sin T \neq 0=f(0)$.

Таким образом, $f(x)$ не является периодической.

6.2 Интервалы возрастания и убывания функции. Экстремумы.

Определение 34. Функция $f(x)$ называется возрастающей на интервале $x\in(a;b)$, если $\forall x_1,x_2 \in (a;b)$ из неравенства $x_1<x_2$ следует $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение 35. Функция $f(x)$ называется убывающей на интервале $x\in(a;b)$, если $\forall x_1,x_2 \in (a;b)$ из неравенства $x_1<x_2$ следует $f(x_1)>f(x_2)$.

Определение 36. Точка x_1 называется точкой максимума для $f(x)$, если можно найти такую окрестность $(\alpha;\beta)$ точки x_1 $(\alpha<x_1<\beta)$, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$.

Определение 37. Точка x_2 называется точкой минимума для $f(x)$, если можно найти такую окрестность $(\alpha;\beta)$ точки x_2 $(\alpha<x_2<\beta)$, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_2)$.

Определение 38. Точки максимума и минимума вместе называются точками экстремума.

Определение 39. Значения аргумента x для рассматриваемой $f(x)$, при которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ имеет разрыв, называются критическими точками функции $f(x)$.

Примечание. При исследовании функции на возрастание, убывание и экстремум в заданном интервале $x\in(a;b)$ полезно знать следующие свойства дифференцируемых функций:

1. Не во всякой критической точке функция имеет максимум или минимум, но, если в какой-либо точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума или минимума, то точка x_0 наверняка является критической.
2. Если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то при $x=x_0$ $f(x)$ имеет максимум.
   Если при переходе через точку x_0 слева направо $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс, то $f(x)$ имеет в данной точке минимум.
3. Пусть $f'(x_0)=0$ и в некоторой окрестности точки x_0 существует и непрерывна $f''(x)$, тогда при $x=x_0$ $f(x)$ имеет максимум, если $f''(x)<0$, и минимум, если $f''(x)>0$.
4. Если во всех точках $x\in(a;b)\to f'(x)>0$, то $(a;b)$ – является интервалом возрастания $f(x)$.
   Если во всех точках $x\in(a;b)\to f'(x)<0$, то $(a;b)$ – является интервалом убывания $f(x)$.

Пример 28 (Задание 17). $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$. Найти интервалы монотонности функции и исследовать $f(x)$ на экстремум.

Решение. 1) $D=(-\infty;+\infty)$ – область определения

2) $f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$

3) Найдем критические точки $f(x)$:

$x_1={}^2/_5$, так как $f'({}^2/_5)=0$

$x_2=0$, так как $f'(0)=\infty$

4) Найдем интервалы монотонности:

$x\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$ - интервалы возрастания $f(x)$, так как $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$

$x\in\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$ - интервал убывания $f(x)$, так как $f'(x)<0$ при $x\in\left(0;\dfrac{2}{5}\right)$.

5) Исследуем $f(x)$ на экстремум в критической точке $x_2=0$. Так как при $x\in(-\infty;0)\to f'(x)>0$ а при $x\in\left(0;\dfrac{2}{5}\right)\to f'(x)<0$, то при переходе слева направо через значение $x_2=0$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x_2=0$ $f(x)$ имеет максимум, а именно $(y)|_{x=0}=0$.

Аналогично исследуя на экстремум $f(x)$ критическую точку $x_1={}^2/_5$, заключаем, что при $x_1={}^2/_5\to f(x)$ имеет минимум, а именно

$$(y)|_{x=\frac{2}{5}}=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

На основании приведенного исследования можно построить график $f(x)$:

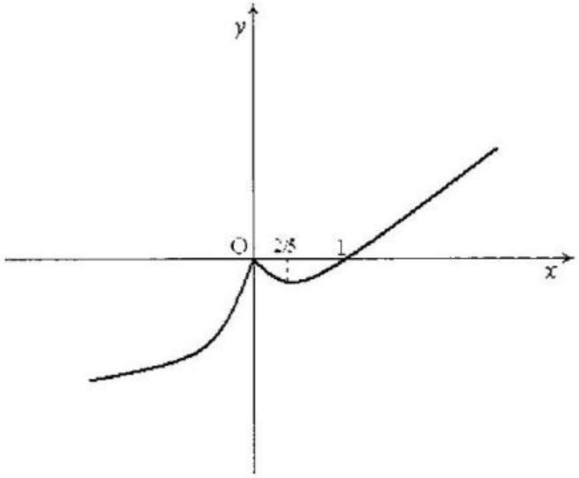

Рис 1.

6.3 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Согласно свойству 7 для $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$ (см. §4.7 данной работы) функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

Таким образом, функция на отрезке $[a;b]$ достигает своего наибольшего значения либо на одном из концов данного отрезка либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой максимума.

То же самое можно сказать и о наименьшем значении функции: оно достигается либо на одном из концов данного отрезка либо в такой внутренней точке этого отрезка, которая является точкой минимума.

Отсюда вытекает следующее правило.

Для того, чтобы найти наибольшее значение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ надо:

1) найти все максимумы $f(x)$ на отрезке $[a;b]$
2) определить $f(a)$ и $f(b)$
3) из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее.

Аналогичным образом следует поступать и при определении наименьшего значения функции на отрезке.

Пример 29 (Задание 18). Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x+3$ на отрезке $x \in [-3; {}^3/_2]$.

Решение. 1) Находим максимумы и минимумы на отрезке $[-3; {}^3/_2]$.

$y'=3x^2-3$, $3x^2-3=0$, Отсюда находим критические точки $x_1=1$, $x_2=-1$.

Исследуем на экстремум $f(x)=x^3-3x+3$ с помощью второй производной $y''=6x$, $(y'')|_{x=1}=6>0$.

Следовательно в точке $x_1=1$ имеет место минимум $(y)|_{x=1}=1$.

Далее, $(y'')|_{x=-1}=-6<0$, следовательно в точке $x_1=-1$ имеет место мксимум $(y)|_{x=-1}=5$.

2) Определим значения $f(x)$ на концах отрезка $[a;b]=[-3; {}^3/_2]$:

$(y)|_{x=-3}=-15$; $(y)|_{x=3/2}=15/8$.

Таким образом, наибольшее значение $f(x)$ на отрезке $[-3; {}^3/_2]$ есть $(y)|_{x=-1}=5$.

Наименьшее значение есть $(y)|_{x=-3}=-15$.

6.4 Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба

Рассмотрим на плоскости кривую $y=f(x)$, являющуюся графиком дифференцируемой функции $f(x)$.

Определение 39. Кривая $y=f(x)$ называется выпуклой, (выпуклой вверх) на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая $y=f(x)$ называется вогнутой, (выпуклой вниз) на интервале, (a;b), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

Определение 40. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба** кривой.

При исследовании поведения функции на интервале $(a;b)$ полезно знать следующее правило для дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$:

Если во всех точках $x \in (a;b) \rightarrow f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ выпукла на этом интервале.

Если во всех точках $x \in (a;b) \rightarrow f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ вогнута на этом интервале.

Пример 30 (Задание 19). $y=x^3$. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

Решение. Кривая определена уравнением $y=x^3$, $D=(-\infty;\infty)$ – область определения функции $f(x)=x^3$. Так как $y''=6x$, то

$y''>0$ при $x \in (-\infty;0)$;

$y''<0$ при $x \in (0;\infty)$.

Соответственно, $(-\infty;0)$ – интервал выпуклости функции $f(x)=x^3$; $(0;\infty)$ – интервал вогнутости, x=0 – точка перегиба (т.к. x=0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости).

6.5 Схема исследования функции

Схема исследования функции включает в себя следующие задачи:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить предельные значения на границе области определения.
3. Найти точки разрыва функции и указать их тип.
4. Найти уравнения вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот, если они существуют.
5. Указать характер поведения функции (четная, нечетная, периодическая, общего вида).
6. Найти, если это не сложно, точки пересечения графика с осями координат.
7. После этого построить примерный ход графика, удовлетворяющего приведенному исследованию.
8. Уточнение графика с использованием первой производной (интервалы возрастания, убывания, исследования на экстремум).
9. Уточнение характера графика с использованием второй производной для $f(x)$ (исследование на выпуклость, вогнутость, точки перегиба).
10. Построить график функции.

Пример 30 (Задания 20, 21). Провести полное исследование и построить график функции $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

1. $f(x)$ существует всюду, кроме точки x=2. $D=\{x \in R \mid x \neq 2\}=(-\infty;2)U(2;\infty)$.

2. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}\left(x^2-x-6\right)\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=-4\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-x-6}{x-2}=-4\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=+\infty$$

3. Из вычисленных предельных значений можно сделать вывод, что точка $x_0=2$ – является точкой разрыва второго рода.

4. По определению вертикальных асимптот $x=2$ – вертикальная асимптота. Найдем наклонные асимптоты – $y=kx+b$. Для этого найдем k и b.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6}{x-2}=1$$

Отсюда имеем $y=x+1$ – наклонная асимптота при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

5. $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ - функция общего вида.

6. Найдем точки пересечения графика с осями координат.
При $x=0 \to y=3$.
График проходит через точку $A\ (0;3)$.

При $y=0 \to \dfrac{x^2-x-6}{x-2}=0$, $x^2-x-6=0$, $x_1=3$, $x_2=-2$.

График функции проходит через точки $B(3;0)$ и $C(-2;0)$.

7. Намечаем примерный ход графика. Для этого проводим вертикальную асимптоту $x=2$ и наклонную асимптоту $y=x+1$. После этого проводим кривую слева через точки $C(-2;0)$ и $A\ (0;3)$. Согласно вычисленным пределам функции в точке $x=2$ (слева и справа). Справа кривая пройдет через точку $B(3;0)$.

8. Уточним полученный график с помощью первой производной:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x-6}{x-2}\right)'=\frac{(2x-1)(x-2)-x^2+x+6}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$$

Для того, чтобы найти критические точки, найдем корни числителя, так как в области D знаменатель $(x-2)^2\neq 0$. $x^2-4x+8=0$, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i$. Следовательно, числитель ни при каких действительных x в ноль не обращается.

Вывод: $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ не имеет экстремумов.

Так как при $x\in D \to f'(x)>0$, то $f(x)$ – возрастающая функция в области D.

9. Покажем еще, что и точек перегиба эта функция не имеет.

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4}=-\frac{8}{(x-2)^3}.$$

Критических точек второго рода нет, так как при $x\in D$, $f''(x)\neq 0$ и $f''(x)\neq\infty$, $f''(x)>0$ при $x<2$, следовательно кривая вогнута вниз ($\cup$) на интервале $x\in(-\infty;2)$. $f''(x)<0$ при $x<2$, на интервале $x\in(2;\infty)$ кривая вогнута вверх ($\cap$).

10. Построим график функции $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$ (см. рис.2)

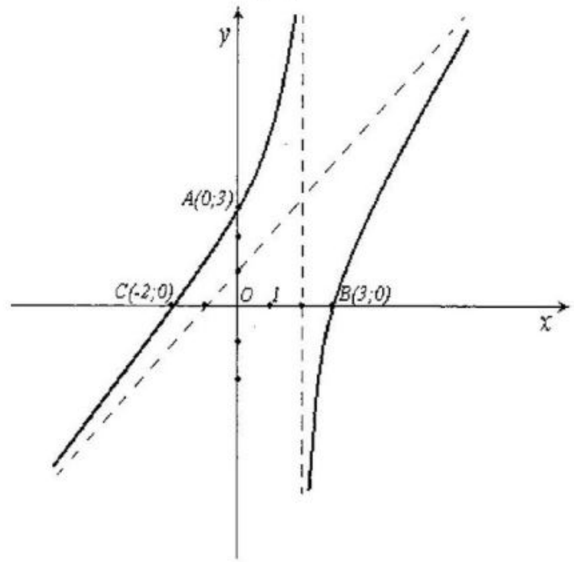

Рис. 2

Литература

1. Расчетно-графическая работа 1.1 по высшей математике для студентов 1-го курса (1-й семестр). Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
Москва, 2009г. Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), кафедра высшей математики.

Рассчетно-графическая работа №1.1

1. Указать, какое отображение f_1 или f_2, является линейным и найти образ отрезка [0;1] при выбранном отображении.

1. $f_1=\frac{1}{1+x}$; $f_2=\frac{\ln(x^2)+x\ln x}{\ln x}$.

2. $f_1=\frac{x\ln x+\ln(x^3)}{\ln x}$; $f_2=e^x+1$.

3. $f_1=\frac{2x^2-2}{x+1}$; $f_2=\frac{5}{x}+3$.

4. $f_1=e^{\ln(2x+3)}$; $f_2=2^x+3$.

5. $f_1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $f_2=\frac{x\ln x^{(x+1)}}{x\ln x}+2$.

6. $f_1=\frac{e^{x^2+1}(2x+1)}{e^{x^2}}$; $f_2=2x+\frac{1}{x+1}$.

7. $f_1=1+x+\sqrt{x}$; $f_2=\frac{3x^2-2x-1}{x-1}$.

8. $f_1=\frac{x^3+4x^2+5x+6}{2x^2+2x+4}$; $f_2=\cos 2x$.

9. $f_1=x+\sin x$;
$f_2=\frac{2x^3+x^2-7x-6}{x^2-x-2}$.

10. $f_1=\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2-1}$; $f_2=3^x+2$.

11. $f_1=e^{\ln(5x+1)}+2$; $f_2=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

12. $f_1=\frac{3x^3+x^2+6x+2}{x^2+2}$;
$f_2=tg2x+3$.

13. $f_1=1+x+\frac{1}{x^2}$;
$f_2=\frac{\ln(x^3)+2x\ln x}{\ln x}$.

14. $f_1=\frac{x^2\ln x+2x\ln x}{x\ln x}$; $f_2=2x+\frac{1}{x^2}$.

15. $f_1=\frac{2x^3+3x^2+2x+3}{x^2+1}$;
$f_2=\sin x+\cos x$.

16. $f_1=2x^2+3x+1$;
$f_2=\frac{3x\sin^2 x+5\sin^2 x}{2-2\cos^2 x}$.

17. $f_1=e^{\ln(5x+1)}+3$; $f_2=\sin x+\frac{2}{x}$.

18. $f_1=\frac{2x^3+2}{x+1}$;
$f_2=\frac{x^3+2x^2+2x+4}{x^2+2}$.

19. $f_1=\frac{x^3-2x^2-2x+4}{x^2-2}$; $f_2=\frac{1}{x+5}$.

20. $f_1=\frac{5x\cos^2 x+2\sin^2 x-2}{3-3\sin^2 x}$;
$f_2=3^x+1$.

21. $f_1=\frac{x\ln x+\ln(x^3)}{\ln x}$; $f_2=\frac{1}{x+3}$.

22. $f_1=\frac{2x^2-2}{x+1}$; $f_2=2^x+3$.

23. $f_1=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $f_2=\frac{3x^2-2x-1}{x-1}$.

24. $f_1=e^{\ln(3x+2)}+3$;
$f_2=\cos x+\frac{1}{x}$.

25. $f_1=1+x+\sqrt[3]{x}$;
$f_2=\frac{x^3+4x^2+5x+6}{2x^2+2x+4}$.

26. $f_1=x+\sin x$;
$f_2=\frac{3x\sin^2 x+5\sin^2 x}{2-2\cos^2 x}$.

27. $f_1=\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2+1}$; $f_2=e^{\ln(x+5)}$.

28. $f_1=\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2-1}$; $f_2=x+\cos 2x$.

29. $f_1=2x^2+3x+1$;
$f_2=\frac{x^3+2x^2+2x+4}{x^2+2}$.

30. $f_1=\frac{1}{x+3}$;
$f_2=\frac{e^{x^3+1}(3x+1)}{e^{x^3}}$.

2. Установить соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

1. $x_1=3$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=0.3$;
$A=\{x\in Z|\ -2<x<3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -5\le x<3\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -2<x<3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -1\le x\le 2\}$,

2. $x_1=1$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-5$;
$A=\{x\in Z|\ -7<x<1\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -5<x<1\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -5<x<1\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -5<x\le 1\}$,

3. $x_1=0.4$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=3$;
$A=\{x\in Z|\ -2<x<3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -2<x<4\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -3<x<3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ 0<x<3\}$,

4. $x_1=-2$, $x_2=\sqrt{6}$, $x_3=0.3$;
$A=\{x\in N\ |\ -3<x<2\}$,
$B=\{x\in R\backslash Q\ |\ -2<x<3\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ -3\le x<3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -2<x<2\}$,

5. $x_1=2$, $x_2=0.5$, $x_3=\sqrt{5}$;
$A=\{x\in Z|\ 0.5<x\le 3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -2<x<2\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ 0<x<3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -2<x<2\}$,

6. $x_1=0.7$, $x_2=-3$, $x_3=\sqrt{2}$;
$A=\{x\in N\ |\ -3\le x\le 3\}$,
$B=\{x\in R\backslash Q\ |\ 0.7\le x<2\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ -3\le x\le \sqrt{2}\}$,
$D=\{x\in Q|\ -3<x<1\}$,

7. $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-2$, $x_3=0.2$;
$A=\{x\in Z|\ -2\le x<5\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -2\le x<3\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ 0.2\le x<3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ 0<x<\sqrt{5}\}$,

8. $x_1=0.5$, $x_2=-\sqrt{5}$, $x_3=2$;
$A=\{x\in Z|\ -\sqrt{5}\le x<3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -3<x\le 1\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -5\le x<2\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -\sqrt{5}\le x<2\}$,

9. $x_1=-0.4$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt{7}$;
$A=\{x\in R\backslash Q|\ -0.4\le x<3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -3\le x\le \sqrt{7}\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ 1<x\le 3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -4<x<2\}$,

10. $x_1=0$, $x_2=2.3$, $x_3=\sqrt{7}$;
$A=\{x\in R\backslash Q|\ 2.3\le x<3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -3<x<3\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ -3<x\le \sqrt{7}\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ 0<x\le 3\}$,

11. $x_1=-4$, $x_2=\sqrt{8}$, $x_3=1.1$;
$A=\{x\in Z|\ -5\le x\le 3\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -4\le x\le 1.1\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -4\le x\le 3\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -4<x\le 8\}$,

12. $x_1=-1.2$, $x_2=-\sqrt{8}$, $x_3=5$;
$A=\{x\in Z|\ -1.2\le x<5\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -\sqrt{8}\le x<10\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q\ |\ -3\le x\le 5\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -4<x<5\}$,

13. $x_1=2.4$, $x_2=\sqrt{10}$, $x_3=3$;
$A=\{x\in R\backslash Q\ |\ 2.4\le x\le 5\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -3\le x\le 10\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ 0\le x\le 5\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ 0<x\le \sqrt{10}\}$,

14. $x_1=3.5$, $x_2=4$, $x_3=\sqrt{11}$;
$A=\{x\in N\ |\ 1<x<5\}$,
$B=\{x\in Z\ |\ 0<x<4\}$,
$C=\{x\in Q\ |\ \sqrt{11}\le x<4\}$,
$D=\{x\in R\backslash Q|\ 0\le x\le 3.5\}$,

15. $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{11}$, $x_3=-4$;
$A=\{x\in N\ |\ -4\le x\le 4\}$,
$B=\{x\in R\backslash Q|\ -4\le x\le 0\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ -4<x<3\}$,
$D=\{x\in Q|\ -6<x\le -\sqrt{11}\}$,

16. $x_1=1.8$, $x_2=\sqrt{7}$, $x_3=-5$;
$A=\{x\in N\ |\ -5\le x<2\}$,
$B=\{x\in Q\ |\ -5<x\le \sqrt{7}\}$,
$C=\{x\in Z\ |\ -7\le x\le \sqrt{7}\}$,
$D=\{x\in R\backslash Q|\ -5\le x<3\}$,

17. $x_1=-2.9$, $x_2=\sqrt{10}$, $x_3=8$;
$A=\{x\in Z|\ -2.9\le x\le 10\}$,
$B=\{x\in R\backslash Q|\ -3<x\le 8\}$,
$C=\{x\in Q\ |\ -2<x<8\}$,
$D=\{x\in R\ |\ -3<x<\sqrt{10}\}$,

18. $x_1=2.5$, $x_2=2$, $x_3=-\sqrt{5}$;
$A=\{x\in R\ |\ -2<x<\sqrt{5}\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -\sqrt{5}<x<2\}$,
$C=\{x\in Q\ |\ 2<x<5\}$,
$D=\{x\in R\backslash Q|\ -3<x\le 2.5\}$,

19. $x_1=\sqrt{13}$, $x_2=3.8$, $x_3=3$;
$A=\{x\in R\ |\ -5<x<3.8\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -4\le x\le \sqrt{13}\}$,
$C=\{x\in Q\ |\ \sqrt{13}\le x\le 3.8\}$,
$D=\{x\in R\backslash Q|3<x<\sqrt{13}\}$,

20. $x_1=\sqrt{14}$, $x_2=6$, $x_3=3.7$;
$A=\{x\in R|3.7\le x<\sqrt{14}\}$,
$B=\{x\in R|\ 0<x<6\}$,
$C=\{x\in Z|\ -6\le x<7.2\}$,
$D=\{x\in R\backslash Q|\ 3.7<x\le 6\}$,

21. $x_1=\sqrt{15}$, $x_2=-3$, $x_3=4$;
$A=\{x\in R\backslash Q\ |\ -3\le x\le 4\}$,
$B=\{x\in R\ |\ -3\le x<4\}$,
$C=\{x\in Q|\ -\sqrt{15}<x<4\}$,
$D=\{x\in N|\ \sqrt{15}\le x\le 9\}$,

22. $x_1=-1.5$, $x_2=5$, $x_3=\sqrt{17}$;
$A=\{x\in Z|\ -1.5\le x<10\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -2<x<5\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q|\ -1.5\le x\le 5\}$,
$D=\{x\in Q\ |\ -2<x<4\}$,

23. $x_1=-\sqrt{20}$, $x_2=-5$, $x_3=1.3$;
$A=\{x\in Z\ |\ -6<x<1.3\}$,
$B=\{x\in Q\ |\ -\sqrt{20}\le x<2\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q|\ -5\le x\le 2\}$,
$D=\{x\in N\ |\ -5<x\le 1.3\}$,

24. $x_1=7$, $x_2=-2.5$, $x_3=\sqrt{37}$;
$A=\{x\in R\ |\ -2.5\le x<6\}$,
$B=\{x\in N\ |\ -3\le x\le \sqrt{37}\}$,
$C=\{x\in R\backslash Q|\ -2\le x\le 7\}$,
$D=\{x\in Z|\ \sqrt{37}\le x<37\}$,

25. $x_1=-5, x_2=4.5, x_3=\sqrt{50}$;
A={x∈R | -5<x<7},
B={x∈N | -5≤x≤$\sqrt{50}$},
C={x∈Z | -$\sqrt{50}$<x<5},
D={x∈R\Q| -5≤x≤50},

26. $x_1=0.7, x_2=\sqrt{15}, x_3=-3$;
A={x∈ R\Q | -3≤x≤4},
B={x∈ R | -10<x<0.7},
C={x∈ N | -3≤x≤4},
D={x∈Q | -3<x≤$\sqrt{15}$},

27. $x_1=2.7$ $x_2=\sqrt{39}$, $x_3=-1$;
A={x∈Z | -2<x≤$\sqrt{39}$},
B={x∈N | -1≤x≤2.7},
C={x∈R\Q | -2<x<7},
D={x∈Q | -1≤x≤2},

28. $x_1=3.3, x_2=-3, x_3=\sqrt{15}$;
A={x∈Z | -4≤x≤$\sqrt{15}$},
B={x∈N | -3≤x<5},
C={x∈Q | 2<x≤$\sqrt{15}$},
D={x∈R\Q | -3≤x≤4},

29. $x_1=4.1$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-2$;
A={x∈Z | -4<x≤4.1},
B={x∈Q | -2<x≤5},
C={x∈R | -2<x<1},
D={x∈R | -3<x≤2},

30. $x_1=5.5, x_2=-5, x_3=\sqrt{18}$;
A={x∈R | -5≤x≤5.5},
B={x∈N | -10≤x≤6},
C={x∈Z | -7<x≤5.5},
D={x∈Q | -5<x<18}.

3. Заданы три комплексных числа z_1, z_2, z_3. Вычислить z в алгебраической форме.

1. $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}$,
$z_1=2+3i,\ z_2=1-i,\ z_3=-2-3i.$

2. $z=\dfrac{z_1^2+2z_2}{z_3}$,
$z_1=2+3i,\ z_2=1-i,\ z_3=-2-3i.$

3. $z=z_1\cdot z_2+3z_3$,
$z_1=1+3i,\ z_2=4+2i,\ z_3=-4+2i.$

4. $z=\dfrac{z_2}{z_1}+3iz_3$,
$z_1=1+3i,\ z_2=4+2i,\ z_3=-4+2i.$

5. $z=\dfrac{z_1}{z_2}+3z_3$, $z_1=1-2i,\ z_2=1+3i,\ z_3=3+2i.$

6. $z=\dfrac{z_3}{z_1}+iz_2$, $z_1=1-2i,\ z_2=1+3i,\ z_3=3+2i.$

7. $z=\dfrac{2z_1}{z_3}+(1-i)z_2$,
$z_1=2+3i,\ z_2=1+2i,\ z_3=-2+3i.$

8. $z=\dfrac{z_1+2z_3}{z_2}$,
$z_1=2+3i,\ z_2=1+2i,\ z_3=-2+3i.$

9. $z=\dfrac{z_1+3z_2}{i\cdot z_3}$,
$z_1=3-i,\ z_2=2+i,\ z_3=5-2i.$

10. $z=\dfrac{2z_2-3z_3}{z_1}$,
$z_1=3-i,\ z_2=2+i,\ z_3=5-2i.$

11. $z=2\dfrac{z_1}{z_2}+3\dfrac{z_2}{z_3}$,
$z_1=2+3i,\ z_2=3-2i,\ z_3=1+i.$

12. $z=\dfrac{z_1z_3}{z_2}$,
$z_1=2+3i,\ z_2=3-2i,\ z_3=1+i.$

13. $z=3z_1+2iz_2+z_3$,
$z_1=2+5i,\ z_2=5-2i,\ z_3=2i.$

14. $z=\dfrac{-2(z_1z_2)}{z_3}$,
$z_1=2+5i,\ z_2=5-2i,\ z_3=2i.$

15. $z=4z_1+\dfrac{z_2}{2z_3}$,
$z_1=3-5i,\ z_2=2+5i,\ z_3=2+i.$

16. $z=z_1^2+2z_2+z_3$,
$z_1=3-5i,\ z_2=2+5i,\ z_3=2+i.$

17. $z=2z_1+z_2^2+3z_3$,
$z_1=1+5i,\ z_2=2-4i,\ z_3=2-3i.$

18. $z=\dfrac{z_3+z_2^2}{z_1}$,
$z_1=1+5i,\ z_2=2-4i,\ z_3=2-3i.$

19. $z=\dfrac{z_1+2z_3}{z_2}$,
$z_1=2+4i,\ z_2=3-4i,\ z_3=3-2i.$

20. $z=\dfrac{z_2^2}{2z_1+z_3}$,
$z_1=2+4i,\ z_2=3-4i,\ z_3=3-2i.$

21. $z=\dfrac{iz_1+2z_2}{z_3}$,
$z_1=1+6i,\ z_2=2-4i,\ z_3=3i.$

22. $z=2z_1^2+3\dfrac{z_2}{z_3}$,
$z_1=2-i,\ z_2=3+i,\ z_3=4+2i.$

23. $z=\dfrac{3z_1^2+z_3}{i\cdot z_2}$,
$z_1=2-i,\ z_2=3+i,\ z_3=4+2i.$

24. $z=3z_3^2+2z_2+iz_1$,
$z_1=3+7i,\ z_2=1-i,\ z_3=2+3i.$

25. $z=\dfrac{z_1^2}{z_2\cdot z_3}$,
$z_1=3+7i,\ z_2=1-i,\ z_3=2+3i.$

26. $z=\dfrac{2i\cdot z_1\cdot z_3}{z_2}$,
$z_1=3-7i,\ z_2=-1+i,\ z_3=2-3i.$

27. $z=\dfrac{2z_1\cdot z_2}{z_3}$,
$z_1=3-7i,\ z_2=-1+i,\ z_3=2-3i.$

28. $z=3z_2+2\dfrac{z_3}{z_1}$
$z_1=2-3i,\ z_2=3+2i,\ z_3=1-i.$

29. $z=\dfrac{z_1^2}{2i\cdot z_2\cdot z_3}$
$z_1=2-3i,\ z_2=3+2i,\ z_3=1-i.$

30. $z=\dfrac{z_2\cdot z_3}{3z_1}$,
$z_1=2-4i,\ z_2=3+4i,\ z_3=3+2i.$

4. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-6x^2+3x+18}{2x^2-7x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-2x^3-27}{2x^2+x-21}$
3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-5x-6}{3x^2+x-14}$
4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^5-32}{5x^2+3x-26}$
5. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4-x^2+2x+1}{-x^2+6x+7}$
6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^4+2x^2+20x-16}{5x^2+8x-4}$
7. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-2x^3-27}{3x^2+2x-33}$
8. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{8x^2-13x-6}$
9. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^5+2x^4+10x-20}{x^3+8}$
10. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4-7x^2+4x-6}{2x^2+7x+3}$
11. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-8x^2+21x-18}$
12. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+x^3-2x^2-3x-1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$
14. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+5x+4}{x^3-x^2-3x-1}$
15. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3-7x^2+11x-5}$
16. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^4+4x^2+5x}$
17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$
18. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{3x^2+5x+2}$
19. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$
20. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$
21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2-4}$
22. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{2x^2+3x-2}$

24. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+x-6}$

26. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^3+3x^2+16}$

27. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{2x^4-x-3}$

28. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-43}{x^3-3x^2+4}$

29. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^4-7x^2-5x-3}{5x^2-14x-3}$

30. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+2}{x^3+3x^2+8x+12}$

5. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-1}{x^2+4}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2+x-1}{3x^3+2x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2+x+2}{x^4+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2-1}{x+3x^2-2x^4}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x^3}{x^2+3x-16}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x^3}{5x^3+7x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3+1}{3x^2+x^4}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^2-18}{10x^4-18x^2+3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-7x^2-5x-3}{5x^2-14x+3}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3}{5x^2+4x^3+3x^4}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x^3}{x^2-14x+3}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-7x^2-5x-3}{x^4-4x^5}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+4x^2-1}{x-3x^2-x^4}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x^3+x^4}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+3}{4x^2+x^4}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x+3}{4x^2+x^3}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x^3}{3x^2-5x-16}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2-1}{x+3x^2-2x^4}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+11}{x^2+3x^3-2x^4}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-2x+5x^2+9x^3}{2+x^2+3x^3-2x^4}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+2x^2-x^3}{3x^2-4x-15}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{21x^2-10x+7}{x^2+2x^3-2x^4}$

25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3+3x^4}{6x^2+5x+14}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2+9x^3}{3+3x^2-2x^4}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x^3}{4x^2+3x-1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x^3+5x^4}{4x^2+2x+1}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^4-2x^2+1}{7x+3x^2-2x^4}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3+x^2+3}{7x+3x^2-2x^4}$

6. Найти предел

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{tg^2 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to0} tg2x\cdot tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}-2\cos x}{\pi-6x}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3x^2)-1}{\sin^4 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{1-\cos3x}$

7. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)-1}{1+\sqrt[3]{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos8x}$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos6x-1}{x\cdot tg2x}$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\cos x-\cos^3 x}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos x}{1-\cos6x}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin^2\sqrt{x}}$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos4x)}$

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x}$

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$

18. $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)ctg\pi x$

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi(x-2)}{2}\right)}{2-\sqrt{x+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x-\sin2x}{\sin^3 x}$

22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(9x^2)}{\sin^4 3x}$

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin7x}{tg(2\pi+2x)}$

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{(1-\cos x)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{tg\left(2\pi\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)}$

27. $\lim\limits_{x\to1}(1-\cos3x)ctg^2 4x$

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{\sin x\cdot tg3x}$

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin2x}$

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{\cos7x-\cos3x}$

7. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)^{5x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+4}\right)^{x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{3x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-3}\right)^{7-x}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x-1}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{2x+1}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{5x-4}\right)^{3x+2}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{5x-1}$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-4}\right)^{3x-2}$
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+5}\right)^{2x+3}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{x-4}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{x-3}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x+1}\right)^{2x-1}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x-1}$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+3}$
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x-7}$
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x-1}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{2x+3}$
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-2}$
21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{3x-1}$
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{5x}$
23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{7x-1}$
24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x+4}\right)^{2x-1}$
25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x-1}$
26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-13}{2x+3}\right)^{3x+4}$
27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x+1}\right)^{x+7}$
28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{2x-7}$
29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x+3}\right)^{2x}$
30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x+3}\right)^{2x-7}$

8. Найти предел.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(arctgx\cdot ctg\,2x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{2}\cdot ctg\,\dfrac{\pi x}{2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{3x+x^5}$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2^x-2}{\ln x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x\cdot\sin\dfrac{3\pi x}{2}}$
11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x\sin 2x}$
12. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x\sin 5x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2\pi x-\dfrac{\cos^3\pi x}{\sin^2\pi x}\right)$
14. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg^2 4x\cos 3x}{\sin^2 2x}$
15. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x\cdot ctg^2 x}{ctg^2 3x}$
16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-8)}{x^2+2x-15}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2\cos 3x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-arctgx}{x^3}$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 2x}$
20. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2 3x}{tg^2 4x}$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-4\sin^3 x}{(\pi-2x)\cos x}$
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\sin x}$
23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$
24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x+tgx^2}$
26. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\arcsin\dfrac{x-3}{3}\cdot ctg(x-3)\right)$
27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$
28. $\lim\limits_{x\to -6}\left(\dfrac{x+7}{x+6}-\dfrac{1}{\ln(x+7)}\right)$
29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2tgx-\sin x}$
30. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sqrt{\cos x})\cdot ctg^2 x$

9. Найти и указать характер точек разрыва функции.

1. $y=\dfrac{1}{x+2}$;
2. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$;
3. $y=\dfrac{\cos x}{x}$;
4. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;
5. $y=\dfrac{4}{x+2}$;
6. $y=\dfrac{-5}{x}$;
7. $y=tg\,2x$;
8. $y=\dfrac{9}{9-x^2}$;
9. $y=\dfrac{x+1}{|x+1|}$;
10. $y=x+\dfrac{x+1}{|x+1|}$;
11. $y=\dfrac{x}{x+2}$;
12. $y=2^{\frac{1}{x-2}}$;
13. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$;
14. $y=\dfrac{3}{x+3}$;
15. $y=\dfrac{3}{x-3}$;
16. $y=tg\,\dfrac{x}{2}$;
17. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;
18. $y=3^{\frac{1}{x-3}}$;
19. $y=\dfrac{x^3+x}{2|x|}$;
20. $y=\dfrac{3}{(x+3)^2}$;
21. $y=1-2^{\frac{1}{x}}$;
22. $y=2-\dfrac{|x|}{x}$;
23. $y=\dfrac{1-x^2}{14(x-x^3)}$;
24. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$;
25. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$;
26. $y=\dfrac{2}{x-2}$;
27. $y=tg\,3x$;
28. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$;
29. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;
30. $y=2^{\frac{1}{x+2}}$.

10. Найти асимптоты функции.

1. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $y=\sqrt{x^2-4}$
3. $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$
4. $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$
5. $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$
6. $y=\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$
7. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$
8. $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$
9. $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$
10. $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$
11. $y=\dfrac{4x^3+9}{4x^2+8}$
12. $y=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$
13. $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$
14. $y=\dfrac{17-x^2}{4x+5}$
15. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$
16. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$

17. $y = x + \frac{1}{x^2}$
18. $y = \frac{2x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{2 - 4x^2}$
19. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$
20. $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$
21. $y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}$
22. $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$
23. $y = \frac{4x^3 - 3x}{4x^2 - 1}$
24. $y = \frac{21 - x^2}{7x + 9}$
25. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$
26. $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}$
27. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$
28. $y = \frac{3x^2 - 10}{3 - 2x}$
29. $y = \frac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$
30. $y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

11. Найти производную функции.

1. $y = \left(x^2 + 1\right)^{10}$
2. $y = \sqrt{e^{2x}}$
3. $y = (\sin 3x)^3$
4. $y = \sqrt[3]{4^{\cos x}}$
5. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
6. $y = \sqrt{x}\cos^2 x$
7. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
8. $y = \frac{1}{4} tg^4 x - \ln\cos x$
9. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
10. $y = arcctg\sqrt{x}$
11. $y = \ln(x^2 + 5x + 4)$
12. $y = \ln\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$
13. $y = 3^{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$
14. $y = \arccos\left(\frac{1}{1-x}\right)$
15. $y = \frac{1}{(\sin 2x)^2}$
16. $y = \sqrt{\sin\left(3^x\right)}$
17. $\frac{y = \arcsin\left(x^2\right)}{x}$
18. $y = tg3x - \frac{3}{x^2}$
19. $y = \sqrt[3]{\arcsin\frac{1}{x}}$
20. $y = \left(\cos\frac{1}{x}\right)^5$
21. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
22. $y = \ln arctg\sqrt{x}$
23. $y = \left(\sin 3^x\right)^3$
24. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$
25. $y = \left(tgx - \frac{3}{x^3}\right)^2$
26. $y = 4^{ctg\left(\frac{1}{x}\right)}$
27. $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$
28. $y = \arcsin\left(e^{x^2}\right)$
29. $y = \sin^3(x^2 + 3x + 1)$
30. $y = \sqrt{3\sin x + 4}$

12. Найти производную показательно-степенной функции.

1. $y = x^{\sin x}$
2. $y = (\sin x)^x$
3. $y = x^{\cos x}$
4. $y = (tgx)^x$
5. $y = x^{ctgx}$
6. $y = x^{arctgx}$
7. $y = x^{\arccos x}$
8. $y = (1 - 4x)^{\sin 5x}$
9. $y = (\cos(5 - 4x))^{3x}$
10. $y = (1 - 3x)^{tgx}$
11. $y = x^{2^x}$
12. $y = (1 - x)^{arctg(5-7x)}$
13. $y = (\sin x)^{x^2}$
14. $y = x^{2^{\cos x}}$
15. $y = (\sin(x+1))^x$
16. $y = (x - 1)^{tgx}$
17. $y = (2 - 3x)^{4x}$
18. $y = (\sin(3 - 4x))^{5x}$
19. $y = x^{e^x}$
20. $y = (tg(4 - 5x))^{7x}$
21. $y = (arctg(5 - 7x))^{4x}$
22. $y = x^{3^x}$
23. $y = (2 - x)^{\cos(4-3x)}$
24. $y = (3 - 4x)^{tg5x}$
25. $y = (1 - 4x)^{\pi^x}$
26. $y = \left(x^2 + 1\right)^{4-5x^3}$
27. $y = \left(1 - x^2\right)^{5-4x^3}$
28. $y = (\cos 2x)^{3-5x}$
29. $y = \left(x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$
30. $y = \left(x^3 + 4\right)^{\frac{1}{x^3}}$

13. Написать уравнения касательной и нормали к заданной в неявном виде кривой F(x;y)=0, проходящих через точку (x;y) координаты которой удовлетворяют приведенным условиям.

1. $x^2 + xy + y^2 = 7 \quad (x = 1; y = 2)$.
2. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x + e^x = 0 \quad (x = \frac{\pi}{2}; y = -\frac{\pi}{2})$.
3. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0 \quad (x = 0; y < 0)$.
4. $x^2 + xy^2 = 5 \quad (x = 1; y > 0)$.
5. $x^3 + y^3 - \frac{9}{2}xy = 0 \quad (x = 1; y = 2)$.
6. $x^2 + y^2 = 4 \quad (x = 1; y > 0)$.
7. $x^2 - 4y^2 = 4 \quad (x = 4; y > 0)$.
8. $x^5 + 2y^2 = 9 \quad (x = 1; y > 0)$.
9. $x^2 - 3y^4 = 22 \quad (x = 5; y > 0)$.
10. $x^2 + 3y^4 = 52 \quad (x = -2; y > 0)$.
11. $x^8 + 5y^2 = 21 \quad (x = -1; y < 0)$.
12. $x^3 - 3y^2 = 16 \quad (x = 4; y < 0)$.
13. $\log_2(x+1) + \sqrt{y-1} = 8 \quad (x = 15)$.
14. $\log_3(2x+1) + \sqrt{y+1} = 7 \quad (x = 4)$.
15. $\sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y - 4} = 11 \quad (x = 4)$.
16. $\sqrt{x^3 - 2} + \sqrt{3y - 1} = 9 \quad (x = 3)$.
17. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{2y^3 + 9} = 6 \quad (x = 3)$.
18. $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{y^2 + 9} = 9 \quad (x = 5)$.
19. $2\sin x + 5\sin y + 7\cos y = 5 \quad (x = 0; y = \frac{\pi}{2})$.
20. $7\cos x + 2\sin\frac{x}{y} = 7 \quad (x = 0; y = \frac{\pi}{2})$.
21. $\sqrt{3\cos x + \cos y + 1} = 2 \quad (x = 2\pi; y = \frac{\pi}{2})$.
22. $\sqrt{3\sin y - 5\cos y + \cos x - 1} = 2 \quad (x = \frac{\pi}{2}; y = \pi)$.
23. $\sqrt{3\sin x + 5\cos x + 1} + 7y = 9 \quad (x = \frac{\pi}{2}; y = 1)$.
24. $x + \sqrt{5\sin y - 3\cos y + 4} = 5 \quad (x = 2; y = \frac{\pi}{2})$.
25. $\sqrt{x + 7} + \sqrt{5\sin y - 3\cos y + 4} = 6 \quad (x = 2; y = \frac{\pi}{2})$.
26. $x + \sqrt{10\sin y - 5\cos y + 4} = 6 \quad (x = 3; y = \pi)$.
27. $\sqrt{2 - x} + \sqrt{5\sin y + 3\cos y + 12} = 5 \quad (x = -2; y = \pi)$.
28. $\sqrt{7 - 3x} + \sqrt{3\sin y + 7\cos y + 8} = 2 \quad (x = 2; y = \pi)$.
29. $y^2 + x^2 y = 5 \quad (x = 2; y = 1)$.
30. $y^5 + 2x^2 = 9 \quad (x = 2; y = 1)$.

14. Найти первую $\dfrac{dy}{dx}$ и вторую $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ производные функций, заданных параметрически.

1. $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 - 3t^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^4 - 8t \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 2 + 3t^2 \\ y = 3 - 2t^2 + t^3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t^3 - 6t^2 + 5t \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = t^3 - 2t^2 + t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 2 - 3t^2 \\ y = t^4 - 2t^3 - 1.5t \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ y = 2t^2 - 3t^3 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x = 2 - 3t^2 \\ y = 3t^2 - 2t^3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t^4 - 4t^2 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x = 2t^2 + t \\ y = 6t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = t^2 - 5t \\ y = 4t^3 - 12t \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = t^4 - 16t \end{cases}$
14. $\begin{cases} x = t - 2t^2 \\ y = t^3 + 2t^2 + 1 \end{cases}$
15. $\begin{cases} x = 3t^2 + t \\ y = t^4 + 2t^2 + 1 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = t^2 + 3t \\ y = 1 - t^2 + 2t^3 \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 2 - 2t^2 - t^3 \end{cases}$
18. $\begin{cases} x = t - 3t^2 \\ y = 16t - t^4 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = 5t^2 + 3 \\ y = 2t^3 + t + 1 \end{cases}$
20. $\begin{cases} x = 3 - 5t^2 \\ y = 1 - 2t^2 - t^3 \end{cases}$
21. $\begin{cases} x = t^3 + 2t \\ y = 2t^3 + 6t^2 + 2 \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = 4t^2 + t \\ y = 1 - 6t^2 - 2t^3 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x = 5t^3 + t \\ y = 2t - 8t^3 \end{cases}$
24. $\begin{cases} x = 2t - 3t^3 \\ y = 1 - 3t + 5t^3 \end{cases}$
25. $\begin{cases} x = 3t^2 - 6t \\ y = 6t - 3t^3 \end{cases}$
26. $\begin{cases} x = 2t - 5t^3 \\ y = 4 + 2t + 6t^3 \end{cases}$
27. $\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 3t^3 - 6t^2 + 3 \end{cases}$
28. $\begin{cases} x = 2t - 5t5 \\ y = 3 - t + 8t^3 \end{cases}$
29. $\begin{cases} x = 1 - 4t^3 \\ y = 1 - 5t^2 + 2t^3 \end{cases}$
30. $\begin{cases} x = 6t^2 + 3t \\ y = 2 - 5t^2 + 3t^3 \end{cases}$

15. Вычислить производную $\dfrac{dw}{dz}$ в точке z_0 (в алгебраической форме).

1. $w = (2z+3)^2, \quad z_0 = 1 - i$
2. $w = \dfrac{(2z+1)^2}{z-1}, \quad z_0 = 1 + i$
3. $w = (z+5)^3, \quad z_0 = 2 + 3i$
4. $w = \dfrac{2z-1}{z+1}, \quad z_0 = 2 - 3i$
5. $w = (z+2)^2 + (z-3), \quad z_0 = 3 - i$
6. $w = z^3 + 2, \quad z_0 = 3 + i$
7. $w = \dfrac{z^2+2}{z+1}, \quad z_0 = 1 - 2i$
8. $w = \dfrac{z^3}{z^2+2}, \quad z_0 = 1 + 2i$
9. $w = z^2 + z + 1, \quad z_0 = 1 - 3i$
10. $w = \dfrac{z+5}{z+2}, \quad z_0 = 5 + 2i$
11. $w = z^3 + 1, \quad z_0 = 3 + 2i$
12. $w = \dfrac{2z-1}{3z+2}, \quad z_0 = 3 - 2i$
13. $w = \dfrac{z+1}{z^2+2}, \quad z_0 = 4 + i$
14. $w = z^2 + 3z + 2, \quad z_0 = 4 - i$
15. $w = 3z^2 + z, \quad z_0 = 3 - 2i$
16. $w = \dfrac{z-2i}{3z+i}, \quad z_0 = 2 + i$
17. $w = \dfrac{2z+i}{z-i}, \quad z_0 = 1 + 5i$
18. $w = \dfrac{z-2}{z+i}, \quad z_0 = 1 - 3i$

19. $w = (2z+1)^3, \quad z_0 = 3 - i$
20. $w = \dfrac{2z+5}{3z-1}, \quad z_0 = 2 + i$
21. $w = z^3 + 3z, \quad z_0 = 2 - 3i$
22. $w = 5z^2 - 3z + 2i, \quad z_0 = 1 - 3i$
23. $w = 5z^2 + 1, \quad z_0 = 1 + 3i$
24. $w = \dfrac{3z-1}{2z+1}, \quad z_0 = 2 - i$
25. $w = (z+2)^2, \quad z_0 = 2 + i$
26. $w = \dfrac{z^2+2}{2z-1}, \quad z_0 = 3 - 2i$
27. $w = 2z^2 + 3z + 1, \quad z_0 = 4 - i$
28. $w = (z+3)^2, \quad z_0 = 3 - i$
29. $w = \dfrac{z^2}{z+2}, \quad z_0 = 1 + i$
30. $w = z^2 + 3z, \quad z_0 = 1 - i$

16. Указать характер поведения функции (четная, нечетная, периодическая, общего вида).

1. $y = \dfrac{x^2}{\lg x^4 + \cos x}$;
2. $y = \dfrac{5^x}{4 + \cos x}$;
3. $y = \dfrac{4 - x^2}{\cos 5x + \dfrac{1}{x^8}}$;
4. $y = x^3 \sin 2x$;
5. $y = x^3 \sin 2x - \dfrac{1}{x}$;
6. $y = (x^2 - 1)\sin 4x$;
7. $y = x^5 \sin x + \cos 2x$;
8. $y = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 3x}$;
9. $y = x^3 e^{\frac{1}{x}}$;
10. $y = e^{\cos 2x} - \dfrac{1}{x}$;
11. $y = 3^{\sin 2x} - \dfrac{1}{x}$;
12. $y = \dfrac{\sin 3x}{2 + \cos x}$;
13. $y = \dfrac{x}{e^x + \dfrac{1}{\cos x}}$;
14. $y = \dfrac{x^2}{3 + \cos x}$;
15. $y = \dfrac{\sin 3x}{1 + \cos x}$;
16. $y = \dfrac{\cos x}{3 + tg 3x}$;
17. $y = \dfrac{x}{3 + \arcsin x}$;
18. $y = \dfrac{5 - x^2}{x^3 + \sin^5 x}$;
19. $y = \dfrac{1 + x^2}{2 + tgx}$;
20. $y = \cos 3x - \sin^2 x$;
21. $y = \sin 3x - x^5$;
22. $y = \dfrac{x^2}{3 + \dfrac{1}{\cos x}}$;
23. $y = \dfrac{3x - x^7}{4 + \cos 5x}$;
24. $y = \dfrac{1 - x^6}{\sin^5 x}$;
25. $y = e^{\cos 2x - \frac{x}{10}}$;
26. $y = \dfrac{x^2}{x^4 + \dfrac{1}{\sin^2 x}}$;
27. $y = \dfrac{x^4}{\lg(x^2 + 1) + \cos 5x}$;
28. $y = \dfrac{\sin^3 2x}{1 + tgx}$;
29. $y = \dfrac{x}{1 + \arcsin 3x}$;
30. $y = \sin 3x + x^2$.

17. Исследовать на экстремум функцию.

1. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$;
2. $y = \dfrac{\ln x}{x}$;
3. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$;
4. $y = (x-1)e^{3x}$;
5. $y = x^2 \ln x$;
6. $y = x^3 e^{-4x}$;
7. $y = (3 - x^2)e^x$;
8. $y = (x^2 - 8)e^{x}$;
9. $y = x \ln x$;
10. $y = x^3 \ln x$;
11. $y = 16x^2(x-1)^2$;
12. $y = 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$;
13. $y = \sqrt{x} \ln x$;
14. $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;
15. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;
16. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$;
17. $y = x - \sqrt{3 - x}$;
18. $y = (x+1)^5 e^{-x}$;
19. $y = xe^{-2x^2}$;
20. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}$;
21. $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$;
22. $y = x\sqrt[3]{x - 1}$;
23. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$;
24. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$;

25. $y = x^3 e^{-4x}$;
26. $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$;
27. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$;
28. $y = \frac{x}{x^2+4}$;
29. $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$;
30. $y = (x+2)^2(x-3)^3$;

18. Определить наибольшее и наименьшее значения функции.

1. $y = x^6$ на отрезке [-1;3]
2. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке [-4;5]
3. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16$ на отрезке [1;4]
4. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2(8-x)}$; на отрезке [0;6]
5. $y = \frac{10x}{x^2+1}$; на отрезке [0;3]
6. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$; на отрезке [-3;3]
7. $y = \frac{x^2}{x^2-2x+3}$; на отрезке [-1;3]
8. $y = 2\sqrt{x} - x$; на отрезке [0;4]
9. $y = x^3(8-x)$; на отрезке [0;7]
10. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$; на отрезке [1;9]
11. $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ на отрезке [2;4]
12. $y = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$; на отрезке [-2;2]
13. $y = 4 - x + \frac{4}{x^2}$ на отрезке [1;4]
14. $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; на отрезке [-1;3]
15. $y = 0.5x^3 - 9x^2 + 48x$ на отрезке [0;9]
16. $y = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке [-1;2]
17. $y = \frac{9}{x} + \frac{25}{1-x}$ на отрезке [0;1]
18. $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100$ на отрезке [-4;5]
19. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке [-1;2]
20. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке [-1;2]
21. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; на отрезке [0;1]
22. $y = x - 2\sqrt{x}$; на отрезке [0;5]
23. $y = x\ln\left(\frac{x}{5}\right)$; на отрезке [1;5]
24. $y = e^{-x}x^3$; на отрезке [-1;4]
25. $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; на отрезке [-1;1]
26. $y = \frac{\ln x}{x}$; на отрезке [1;4]
27. $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$; на отрезке [-1;1]
28. $y = -3x^4 + 6x^2$ на отрезке [-2;2]
29. $y = x + 2\sqrt{x}$; на отрезке [0;4]
30. $y = \frac{x-1}{x+1}$; на отрезке [0;4]

19. Найти точки перегиба графика функции.

1. $y = 6x^2 - x^4$;
2. $y = 4x^2 - \frac{1}{x}$;
3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$;
4. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
5. $y = 36x(x-1)^3$;
6. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$;
7. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;
8. $y = x^4 - 6x^2 + 5$;
9. $y = \frac{2x^2-x-4}{x^2-4x+4}$;
10. $y = 3x^3 - 3x^2$;
11. $y = \sqrt[3]{x^2}(x-5)$;
12. $y = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 2$;
13. $y = \frac{2x}{1+x^2}$;
14. $y = \ln(1+x^3)$;
15. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$;
16. $y = \frac{x^3}{12+x^2}$;
17. $y = x^5 - 10x^2 + 3x$;

18. $y = 0.05x^5 - x^4 + 8x^3 - 32x^2$;
19. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$;
20. $y = e^{\frac{1}{x}}$;
21. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2$;
22. $y = (x^2-1)^3$;
23. $y = \sqrt[3]{x+3}$;
24. $y = x^4 - 6x^2 + 5x$;
25. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$;
26. $y = 1 + x^2 - 0.5x^4$;
27. $y = \frac{x^2}{(x-1)^3}$;
28. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
29. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$;
30. $y = x^5 - 10x^2 + x + 3$;

20. Провести полное исследование и построить график функции.

1. $y = \frac{x^2-8}{(x-2)^2}$;
2. $y = \frac{2x-1}{x^2}$;
3. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$;
4. $y = \frac{4x-8}{(x-1)^2}$;
5. $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$;
6. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$;
7. $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$;
8. $y = \frac{3x-2}{x^3}$;
9. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$;
10. $y = \frac{x^2-1}{x^3}$;
11. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
12. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;
13. $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$;
14. $y = -\frac{x^2}{(x+1)^2}$;
15. $y = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$;
16. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$;
17. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
18. $y = \frac{x^2+8}{(x+2)^2}$;
19. $y = -\frac{x^2}{(x+2)^2}$;
20. $y = \frac{(x+1)^2}{x^2}$;
21. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$;
22. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$;
23. $y = -\frac{x^3}{(x+2)^2}$;
24. $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$;
25. $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$;
26. $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$;
27. $y = \frac{(x-1)^3}{x^2}$;
28. $y = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$;
29. $y = \frac{(x+2)^2}{x^3}$;
30. $y = -\frac{x^2}{(x-3)^3}$;

21. Провести полное исследование и построить график функции.

1. $y=\dfrac{1}{x\ln x}$;
2. $y=xe^{\frac{1}{1-x}}$;
3. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$;
4. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$;
5. $y=e^{-\frac{1}{x}}+x$;
6. $y=(1+x^2)e^x$;
7. $y=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$;
8. $y=(x+4)e^{-(x+2)}$;
9. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$;
10. $y=e^{x^2-6x}$;
11. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
12. $y=x-\ln(x+1)$;
13. $y=\dfrac{x}{\ln x}$;
14. $y=\dfrac{e^{2(1-x)}}{2(1-x)}$;
15. $y=(x-1)e^{x-1}$;
16. $y=\dfrac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}$;
17. $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$;
18. $y=\dfrac{x}{\ln^3 x}$;
19. $y=xe^{-x}$;
20. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$;
21. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$;
22. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
23. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$;
24. $y=(2x-1)e^{2(1-x)}$;
25. $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$;
26. $y=xe^{\frac{1}{2-x}}$;
27. $y=\dfrac{e^{-x}}{x^2}$;
28. $y=x\ln x$;
29. $y=x^2\ln x$;
30. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

Таблица вариантов

в	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	15	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	6
2	17	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	14
3	28	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	25
4	18	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	6
5	10	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	14
6	2	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	18
7	22	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	19
8	11	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	30
9	6	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	25
10	4	9	9	27	8	29	28	17	20	17	5	14	10	19	8	21	28	1	12	29	9
11	16	10	1	12	26	21	7	17	23	21	21	19	23	3	8	5	7	29	24	22	1
12	12	14	1	12	16	6	11	23	14	29	9	4	30	15	26	29	19	13	3	17	18
13	23	28	23	16	5	18	27	14	25	5	13	27	4	10	22	5	23	24	4	14	30
14	2	27	21	22	22	14	13	26	27	20	9	2	7	9	9	26	10	23	2	28	9
15	18	12	12	22	24	4	14	9	16	3	3	21	24	14	7	3	27	17	13	12	19
16	11	6	9	27	7	13	26	21	25	15	17	30	12	14	28	16	21	5	4	23	1
17	8	8	3	6	12	10	5	30	3	4	22	21	27	28	30	29	9	9	19	27	9
18	12	9	19	2	3	28	16	20	29	3	19	23	10	13	30	18	19	15	23	19	3
19	7	8	1	20	16	19	21	16	18	11	20	24	21	12	12	5	13	25	8	15	12
20	14	3	5	4	2	21	13	21	28	17	11	29	3	8	14	17	27	29	28	29	30
21	26	14	1	7	23	17	19	21	7	14	30	27	11	26	20	11	24	26	8	27	1
22	8	3	28	16	20	29	29	18	29	2	11	14	21	8	22	3	9	15	21	14	22
23	5	22	28	6	8	22	1	1	18	6	15	25	29	7	24	14	25	18	27	11	3
24	23	22	19	27	27	4	20	14	23	29	17	2	27	11	29	9	1	13	4	14	19
25	22	22	29	15	23	5	3	9	13	11	10	13	12	2	18	25	29	25	19	29	3
26	20	28	23	19	23	21	14	30	26	26	23	28	12	23	9	7	20	13	25	25	22
27	16	12	9	15	13	11	19	18	29	4	15	30	4	7	25	12	8	15	2	8	28
28	20	26	19	25	27	15	8	21	10	19	20	15	22	18	2	30	25	12	25	17	3
29	20	8	15	23	30	9	30	24	6	2	30	12	11	14	6	21	24	25	3	30	3
30	13	10	11	15	17	23	1	22	19	23	8	10	24	2	3	29	25	14	20	28	22
31	29	5	5	13	16	9	7	21	26	21	9	24	23	19	10	1	3	20	4	21	28
32	5	30	14	23	16	6	25	30	4	11	24	19	23	13	6	28	9	14	24	3	25
33	19	17	27	19	28	16	14	30	13	30	5	27	11	2	4	18	5	17	3	11	22
34	21	22	7	21	6	1	2	17	4	21	1	4	20	3	24	30	21	5	23	5	28
35	12	8	23	15	2	25	4	13	13	14	5	14	4	28	16	25	19	18	5	6	29
36	8	29	13	18	9	17	14	6	24	2	10	5	4	27	9	4	19	21	25	12	10
37	15	11	26	20	5	4	28	25	18	6	1	21	6	19	28	10	4	5	27	7	21
38	13	21	10	14	2	1	24	28	12	5	9	26	13	23	14	30	2	9	17	18	25
39	7	2	2	8	20	23	10	22	19	29	15	26	6	11	24	3	18	18	25	26	29
40	28	15	10	13	11	11	26	28	25	30	12	30	26	10	5	17	14	21	3	2	10
41	2	21	30	17	2	14	9	26	16	26	24	2	15	10	5	7	11	20	24	10	21
42	23	11	1	8	13	1	15	20	8	18	18	16	5	30	7	18	7	10	15	7	29
43	8	29	10	7	29	17	20	28	21	15	16	4	14	1	23	8	30	4	29	17	10
44	16	25	15	16	30	6	21	20	1	21	20	17	13	14	4	15	25	25	2	20	25
45	9	30	2	20	9	30	18	1	5	11	7	12	1	22	6	14	17	17	7	22	21
46	20	21	24	8	20	2	20	22	20	21	14	13	26	30	8	12	3	20	19	2	8
47	2	13	21	9	6	12	15	25	21	8	20	21	20	23	15	6	16	1	29	3	23
48	20	22	10	26	1	26	20	6	22	25	20	15	15	30	5	3	19	19	20	2	15
49	20	29	9	28	24	14	5	26	1	10	9	28	19	3	8	17	21	3	2	29	23
50	26	14	24	13	7	9	17	2	24	10	18	2	13	21	18	6	8	13	13	4	23
51	14	26	6	30	8	29	21	13	1	15	26	20	10	29	2	22	28	24	6	26	15
52	16	12	29	8	29	6	27	19	20	13	22	19	14	14	10	26	14	17	23	11	8
53	24	21	16	10	11	29	18	23	23	24	12	20	29	15	6	24	15	15	18	27	21
54	15	5	19	22	26	22	23	10	28	4	11	1	20	8	30	23	6	16	4	18	23
55	8	15	15	2	16	15	16	21	15	21	24	11	14	23	28	23	10	14	9	9	23
56	7	20	8	16	22	27	16	3	3	11	26	23	19	18	18	14	10	21	23	26	14
57	17	22	16	16	15	19	6	13	10	17	1	9	16	3	9	26	23	17	24	7	8
58	29	16	5	9	28	30	7	3	27	19	28	28	15	13	30	29	10	27	29	4	15
59	13	3	3	1	15	29	15	30	8	13	29	3	7	8	20	10	2	22	28	15	23
60	9	27	20	21	16	17	1	30	13	14	27	28	25	10	2	15	12	23	19	16	8