Московский автомобильно-дорожный институт
(Государственный технический университет)
Кафедра высшей математики

Расчетно-графическая работа 1.2

по высшей математике

для студентов 1-го курса

(1-й семестр)

Линейная алгебра
Аналитическая геометрия

Издание третье

Москва
2005

Составители:

Давыдов Е.Г., Киреева С.В., Пенькина Л.А.

Методические указания к расчетно-графической работе N 1.2

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность из $m \cdot n$ чисел a_{ij}, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.
a_{ij} – элемент матрицы, стоящий на пересечении i -ой строки ($i = 1, .., m$) и j -ого столбца ($j = 1, .., n$). Иногда элементами матрицы бывают функции, векторы и другие математические объекты.

Обозначения матрицы: $A = ||a_{ij}|| = (a_{ij})\,(i = 1, .., m;\ j = 1, .., n)$ или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Примеры матриц: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$

Матрица A имеет размер 4×3; матрица B : 3×1 – это матрица-столбец; размер матрицы $C : 1 \times 4$ – это матрица-строка.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается **O**. Матрица, получающаяся из данной путем замены всех строк соответствующими столбцами, называется *транспонированной* и обозначается A' или A^T. Заметим, что при этом все столбцы заменяются соответствующими строками. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Если число m строк матрицы равно числу n столбцов, то матрица называется *квадратной порядка* $m = n$. $D = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

В квадратной матрице порядка n элементы $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ образуют главную диагональ, на побочной диагонали располагаются элементы $a_{n1}a_{n-1,2}...a_{1n}$. Если в квадратной матрице все элементы, расположенные вне главной диагонали равны нулю, то матрица называется *диагональной.* Если все элементы диагональной матрицы равны единице, то матрица называется *единичной.*

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица третьего порядка.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})$ размера $m \times p$ на матрицу $B = (b_{kj})$ размера $p \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

Из определения следует, что 1) перемножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, 2) для нахождения элемента c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$ надо взять из первой матрицы i-ую строку, из второй j-ый столбец, перемножить их соответствующие элементы $a_{ik}b_{kj}$ и найти их сумму:$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

ПРИМЕР 1. Найдите $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 17 \end{pmatrix}. \square$$

ПРИМЕР 2. Найдите $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 + (-3) \cdot 6 & 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 + (-6) \cdot 6 & 4 \cdot (-6) + (-6) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \square$$

Свойства произведения матриц: 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (в общем случае), 2) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; 3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; 4) $A \cdot E = E \cdot A = A$; 5) $A \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot A = \mathbf{O}$. Отметим,что если $A \cdot B = \mathbf{O}$, то *не обязательно* или $A = \mathbf{O}$ или $B = \mathbf{O}$ (см. пример 2).

Определителем (детерминантом) n-го порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n -го порядка называется алгебраическая сумма $n!$ членов, каждый из которых представляет собой произведение n элементов a_{ij}, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца; при этом член определителя берется со знаком " + ", если вторые индексы его элементов образуют четную перестановку, и со знаком " – ", если эта перестановка нечетная (при этом первые индексы идут в порядке возрастания $1\,2\,3 \ldots . n$).

Замечание. Перестановку называют *четной*, если в ней содержится четное число нарушений порядка (инверсий), т.е. случаев, когда большее число стоит впереди меньшего, и *нечетной* – в противном случае.

Обозначается определитель так: $|A|$, или $detA$, или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Определители второго и третьего порядков вычисляются по формулам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}; \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - \\ -a_{33}a_{21}a_{12}. \tag{2}$$

Формулу (2) можно записать иначе:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2'}$$

$(2')$ – разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки. Аналогично получаются разложения по элементам любой строки и любого столбца.

Определитель 4-го порядка можно подсчитать как сумму:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{2''}$$

ПРИМЕР 3. Вычислите определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 14 - 15 = -1;$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot4\cdot(-1)+3\cdot0\cdot1+1\cdot(-2)\cdot1-1\cdot4\cdot1-1\cdot0\cdot0-(-1)\cdot(-2)\cdot3 =$
$= -12.$ □

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|a_{ij}|\,(i,j = 1,2,..n)$ n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из данного путем вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Например, в определителе $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 7 \end{vmatrix}$ $M_{11} = 7$, $M_{12} = -8$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 1$. Если рассмотреть определитель третьего порядка из примера 3, то $M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$ и т.д.

Алгебраическим дополнением (адъюнктом) A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|a_{ij}|$ n -го порядка называется выражение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ где M_{ij} минор элемента a_{ij}. Из определения следует, что $A_{ij} = M_{ij}$ если число $i+j$ – четное и $A_{ij} = -M_{ij}$ если $i+j$ – нечетное число.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если
$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E - единичная матрица.
Обратная матрица A^{-1} существует, если выполнены 2 условия:
1) A – квадратная матрица; 2) $\det A \neq 0$ (A – невырожденная матрица).

Матрица A^{-1} может быть найдена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где A_{ij}- алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы A, причём алгебраические дополнения элементов строк записывают в соответствующие столбцы.

ПРИМЕР 4. Найдите матрицу A^{-1}, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. A – квадратная матрица третьего порядка. Вычислим её определитель:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1.$$

Следовательно, матрица A – невырожденная и для неё существует обратная. Вычислим теперь алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0-1) = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2;$$

$A_{21} = -1; \quad A_{22} = -1; \quad A_{23} = -3; \quad A_{31} = -1; \quad A_{32} = -2; \quad A_{33} = -3.$

Используя формулу (3), получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $A \cdot A^{-1} = E$: $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 3-3 & 3-3 \\ -1-1+2 & -1-1+3 & -1-2+3 \\ -1+1 & -1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяется, что $A^{-1} \cdot A = E$. □

РЕШЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n & = & b_n \end{array} \right. . \tag{4}$$

В матричной форме систему (4) можно записать следующим образом

$$A \cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим *главный определитель* $\Delta = |A|$ системы (4), т.е. определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных x_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Если главный определитель системы (4) не равен нулю, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где Δx_i - вспомогательный определитель, полученный из главного определителя Δ заменой i-го столбца (столбца коэффициентов при неизвестной x_i) столбцом свободных членов:

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Решение системы (4) $AX = B$ матричным методом сводится к нахождению обратной матрицы к матрице A и умножении её на матрицу B:

$$X = A^{-1}B. \tag{8}$$

Еще раз подчеркнём, что правило Крамера и матричный метод применимы тогда и только тогда, когда 1) число уравнений системы равно числу неизвестных; 2) главный определитель системы отличен от нуля.

ПРИМЕР 5. Решите систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

по правилу Крамера и матричным методом:

РЕШЕНИЕ. Вычислим главный определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}(4-2)+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot(2+3)+3\cdot(-1)^{1+3}(-2-6) =$$

$= -15 \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Найдем решение системы по правилу Крамера. Вычислим вспомогательные определители Δx_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -15; \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

По формулам (6) находим

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{15}{-15} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{0}{-15} = 0.$$

Матричный метод. Матрица A системы - квадратная невырожденная, следовательно, для неё существует обратная (3) (см. пример 4):

$$A^{-1} = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу A^{-1} на матрицу $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ и получим матрицу-столбец X:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -5 & -5 & 5 \\ -8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы двумя способами дало, естественно, один и тот же ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$. $\square$

Указание к заданию 1. Воспользуйтесь формулами (5) - (8) и решением примера 5.

РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана матрица A размера $m \times n$. Возьмём любые k $(k \leq \min(n; m))$ строк и k столбцов матрицы A. На их пересечении стоят элементы, образующие определитель k порядка, который и называется *минором* k - порядка матрицы A. Под минором первого порядка матрицы A понимается любой элемент этой матрицы.

Рангом r матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличного от нуля.

Из определения следует, что 1) ранг r матрицы - целое число, заключенное в интервале: $0 \leq r \leq \min\{m; n\}$; 2) все миноры $(r+1)$ порядка матрицы A равны нулю или не существуют; а среди миноров порядка r есть хотя бы один, не равный нулю.

ПРИМЕР 6. Укажите миноры 1,2,3 порядков матрицы и определите её ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Минором первого порядка будет любой элемент матрицы: 0;1;8 и т.д.

Миноры второго порядка : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ и т.д.

Минор третьего порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 8 \neq 0.$ Для матрицы A существуют ещё миноры 3 порядка.

Минор четвёртого порядка для матрицы A не существует, но нашелся минор третьего порядка отличный от нуля. Значит, ранг матрицы A равен 3: $r(A) = 3$. $\square$

Вычислять ранг матрицы, используя определение, очень громоздкая и трудоёмкая задача. На практике, для вычисления ранга используют *элементарные преобразования матрицы*, к которым относят:

1) умножение строки (столбца) на число , отличное от нуля ;

2) прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на любое число;

3) перемена местами двух строк (столбцов) ;

4) вычёркивание нулевой строки (столбца) матрицы.

Справедлива **теорема**:

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется,

т.е. если с помощью элементарных преобразований матрица A перешла в матрицу B, то $r(A) = r(B)$ (при этом матрицы A и B называют *эквивалентными* : $A \sim B$).

Для нахождения ранга матрицы необходимо элементарными преобразованиями свести её к такой матрице, ранг которой находится легко, например к ступенчатой (трапециевидной):

$$\text{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}, \quad b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0.$$

Ранг матрицы B равен r, т.к. минор r - го порядка, составленный из первых r строк и r столбцов равен $b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0$, а миноры более высокого порядка построить нельзя. Подчеркнём, что $r(B)$ равен числу ненулевых строк матрицы B.

ПРИМЕР 7. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Легче проводить выкладки, если элемент $a_{11} = 1$. Для этого из второй строки вычтем первую и запишем результат в первую строку.

Мы использовали 1-ое, 2-ое и 3-е элементарные преобразования:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь были применены следующие элементарные преобразования:

Новую первую строку умножили на (-3) и сложили со второй; её же умножили на (-5) и сложили с третьей. В новой матрице вторая и третья строки оказались равными, поэтому, умножив вторую строку (-1) и сложив её с третьей, получили нулевую третью строку. По четвёртому элементарному преобразованию её мы удаляем. Последняя матрица имеет минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, а миноров третьего порядка составить нельзя, следовательно, $r(A) = 2$.

Можно рассуждать иначе: в ступенчатой матрице размера 2×4 две ненулевые строки, значит $r(A) = 2$. $\square$

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. МЕТОД ГАУССА

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \right. . \qquad (9)$$

Введём обозначения: A – матрица системы, B – матрица столбец свободных членов; $(A|B)$- расширенная матрица, где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \qquad (10)$$

Система (9) называется *совместной,* если она имеет решение.

Теорема Кронекера-Капелли. Линейная система (9) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$r(A) = r(A|B) = r.$$

Если $r = n$, то система (9) имеет единственное решение,
если $r < n$, то система (9) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n - r)$ свободных неизвестных.

Назовём *элементарными преобразованиями системы* соответствующие преобразования в матрицах A и $(A|B)$, совершаемые только над их строками.

Метод Гаусса - это метод последовательного исключения неизвестных с помощью элементарных преобразований системы.

Если столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ свободных членов – нулевой: $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, то система (9) называется *однородной.* Однородная система всегда совместна, т.к. имеет тривиальное (нулевое) решение: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; ...; $x_n = 0$. Если в однородной системе (9) число неизвестных n равно числу уравнений m, то она имеет ненулевое решение в том и только в том случае, если

$$det A = 0. \tag{11}$$

ПРИМЕР 8. С помощью теоремы Кронекера-Капелли исследуйте совместность системы линейных уравнений. В случае совместности решите её методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем расширенную матрицу $(A|B)$ и сведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

Здесь первую строку матрицы $(A|B)$ умножили на (-2) сложили её со второй, далее её же умножили на (-3) и сложили с третьей. В новой матрице вторую строку умножили на (-1) и сложили с третьей; полученную нулевую строку вычеркнули. Приходим к матрице, имеющей ступенчатую форму. Её ранг равен числу строк, т.е. двум. Значит $r(A|B)$=2. Но $r(A)$ тоже будет равен 2, т.к. вычёркивание последнего столбца ступенчатой матрицы не повлияет на её ранг. Итак: $r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна, она имеет бесконечное множество решений, зависящих от $n - r = 4 - 2 = 2$ свободных неизвестных. Выберем любой отличный от нуля минор 2 порядка и назовём его *базисным*: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда *переменные* x_1,x_2 - *базисные*, остальные x_3,x_4 - *свободные* (их число равно $n - r = 2$). Наша *задача выразить базисные переменные через свободные*. Далее можно поступить так. Элементарными преобразованиями матрицы свести матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$ базисного минора ступенчатой матрицы к единичной $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right).$$

Вторую строку разделили на (-11). Новую вторую строку умножили на (-5) и сложили с первой. Последняя матрица определяет систему:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = \frac{17}{11} \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \frac{9}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 = \frac{1}{11} \end{cases},$$

из каждого уравнения которой находим выражение базисной переменной через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 + \frac{1}{11} \end{cases}.$$

Обозначим свободные переменные: $x_3 = c_1$, $c_1 \in R$; $x_4 = c_2$, $c_2 \in R$, тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}c_1 + \frac{4}{11}c_2 + \frac{1}{11} \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}. \quad \square$$

ПРИМЕР 9. Исследуйте на совместность систему:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 9 \end{array}\right. .$$

РЕШЕНИЕ. Приведем матрицу $(A|B)$ к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно: $r(A|B)$=3 (3 ненулевые строки в последней матрице).

Но $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

и $r(A) = 2$. Следовательно $r(A) \neq r(A|B)$ и система несовместна. □

Указание к заданию 2. Выполнение задания аналогично примерам 8 и 9.

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ

Пусть задана квадратная матрица A n-го порядка.

Ненулевой вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется *собственным вектором* матрицы A, если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему вектор:

$$A \cdot X = \lambda X, \quad \lambda \in R. \tag{12}$$

Число λ в этом случае называется *собственным значением,* соответствующим собственному вектору X. Для нахождения собственных значений матрицы A составляют *характеристическое уравнение*:

$$|A - \lambda E| = 0, \quad \text{где } E - \text{ единичная матрица } n-\text{го порядка.} \tag{13}$$

Если λ_0 – собственное значение матрицы A, то соответствующие собственные векторы находят из системы однородных линейных уравнений:

$$(A - \lambda_0 E)X = 0. \tag{14}$$

ПРИМЕР 10. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:
$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель, получим уравнение третьей степени: $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = 5$ являются собственными значениями матрицы A.

Для каждого собственного значения λ найдем соответствующий ему собственный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Пусть $\lambda_1 = 1$, тогда система $(A - \lambda_1 E)X = 0$ для нахождения собственных векторов принимает вид:

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ -x_1 + (3-1)x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решением этой системы будет $x_1 = x_3,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in R$. Положив, например, $x_3 = 1$, получим один из собственных векторов с координатами: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

Замечание. Приравнивать x_3 к нулю нельзя, так как получим нулевой вектор, который не может быть собственным вектором матрицы.

Итак, любой собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$ имеет вид: $X_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \neq 0,\ c \in R.$

Поступая аналогично, получим для $\lambda_2 = 3 \quad X_2 = k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0,\ k \in R;$

для $\lambda_3 = 5 \quad X_3 = m\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, m \neq 0,\ m \in R. \quad \Box$

Указание к заданию 3. При выполнении задания используются формулы (12)-(14) и решение примера 10.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок AB, заданный своим началом A и концом B. *Длиной (модулем)* $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Два вектора называются *равными*, если их модули равны и направления совпадают. Два вектора называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой. Три вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{a}$ – это коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{a}$ по *базису*, т.е. по трем некомпланарным векторам $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}. \tag{15}$$

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ взаимно перпендикулярные и единичные векторы: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, то такой *базис* называется *ортонормированным*. Именно с таким базисом в основном мы и будем работать.

ПРИМЕР 11. Разложите, если возможно, вектор $\overrightarrow{a}$={4;2;0} по векторам $\overrightarrow{p}$={1;-1;2}, $\overrightarrow{q}$={2;2;-1} и $\overrightarrow{r}$={3;7;-7}.

РЕШЕНИЕ. Задача может быть решена, если векторы $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ образуют базис, т.е. будут некомпланарными. Как будет показано ниже для этого достаточно, чтобы смешанное произведение $(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$ векторов $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ было отлично от нуля:

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Значит можно записать: $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$. Найдем координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{a}$ в базисе $\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{r}$. По условию: $\overrightarrow{p} = 1\cdot\vec{i} - 1\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$; $\overrightarrow{q} = 2\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} - 1\cdot\vec{k}$; $\overrightarrow{r} = 3\cdot\vec{i} + 7\cdot\vec{j} - 7\cdot\vec{k}$, тогда $x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r} = (x\vec{i} - x\vec{j} + 2x\vec{k}) + (2y\vec{i} + 2y\vec{j} - y\vec{k}) + (3z\vec{i} + 7z\vec{j} - 7z\vec{k}) = (x + 2y + 3z)\vec{i} + (-x + 2y + 7z)\vec{j} + (2x - y - 7z)\vec{k}$.

Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$ равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 4 & = & x + 2y + 3z \\ 2 & = & -x + 2y + 7z \\ 0 & = & 2x - y - 7z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}. \quad \square$$

Указание к заданию 4: Это задание можно выполнить аналогично примеру 11 с использованием формулы (15).

Если точки A и B заданы координатами: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}. \tag{16}$$

Разделить отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$ это значит на прямой (AB) найти такую точку M, что $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Если заданы координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты делящей точки $M(x_M; y_M; z_M)$ находят по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},\ \lambda \neq -1. \tag{17}$$

Если точка M – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и формулы (17) принимают вид:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{17$'$}$$

ПРИМЕР 12. В трех точках $A_1(1;3)$, $A_2(7;8)$, $A_3(0;4)$ помещены грузы $m_1 = 10, m_2 = 30, m_3 = 5$. Определите кординаты центра масс S этой системы.

РЕШЕНИЕ. Пусть точка $C(x_c; y_c)$ центр системы материальных точек A_1 и A_2. Исходя из физической сущности центра масс, можно заключить, что точка C делит отрезок A_1A_2 в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = 3$. Поэтому $x_c = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{1 + 3\cdot 7}{1+3} = \dfrac{11}{2}$; $\quad y_c = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \dfrac{3 + 3\cdot 8}{1+3} = \dfrac{27}{4}$. Точка $S(x_s; y_s)$ делит отрезок CA_3 в отношении $\lambda_1 = \dfrac{m_3}{m_1+m_2} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$: $x_s = \dfrac{x_c + \lambda_1 x_3}{1+\lambda_1} = \dfrac{44}{9}$; $\quad y_s = \dfrac{y_c + \lambda_1 y_3}{1+\lambda_1} = \dfrac{58}{9}$. Итак, $\quad S\left(\frac{44}{9}; \frac{58}{9}\right)$. $\quad\square$

Замечание. 1) Можно доказать, что центр $S(x_s; y_s; z_s)$ масс материальной системы точек $A_1(x_1; y_1; z_1)$; $A_2(x_2; y_2; z_2)$; ...; $A_n(x_n; y_n; z_n)$, в которых сосредоточены массы m_1; m_2; ...; m_n, имеет следующие координаты

$$x_s = \tfrac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}; \ y_s = \tfrac{y_1m_1 + y_2m_2 + \ldots + y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}; \ z_s = \tfrac{z_1m_1 + z_2m_2 + \ldots + z_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{18}$$

2) Центр масс треугольника $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$ (т.е. центр масс *однородной* треугольной пластины) находится в точке пересечения медиан. Его координаты можно подсчитать по формуле (18), если положить $n = 3$ и $m_1 = m_2 = m_3$:

$$S\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right). \tag{18$'$}$$

3) Если система точек находится в плоскости xOy, то третьи координаты точек в формулах (18) и (18$'$) не рассматриваются.

Указание к заданию 5: Воспользуйтесь формулой (17), решением примера 12 и замечанием 3 к нему. Проверьте свои вычисления по формуле (18).

Пусть α; β; γ - углы, которые образует вектор $\overrightarrow{a} = \{x; y; z\}$ с осями $Ox; Oy; Oz$ соответственно, тогда *направляющие косинусы* $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{a}$ связаны соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и определяются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \tag{19}$$

ПРИМЕР 13. Найдите длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AM}$, если точка M делит отрезок AB в отношении $\lambda = -2$, где $A(5; 6; -1)$, $B(0; -3; 2)$.

РЕШЕНИЕ. Найдем координаты точки M по формулам (17):
$x_M = \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{5+(-2)\cdot 0}{1+(-2)} = -5$; $\quad y_M = \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{6+(-2)\cdot(-3)}{1+(-2)} = -12$; $\quad z_M = \frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{-1+(-2)\cdot 2}{1+(-2)} = 5$, т.е. $\quad M(-5; -12; 5)$.

Координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ вычисляем по формуле (16): $x = x_M - x_A = -5 - 5 = -10$; $y = y_M - y_A = -12 - 6 = -18$; $z = z_M - z_A = 5 + 1 = 6$. Итак, $\overrightarrow{AM} = \{-10; -18; 6\}$. Модуль вектора $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-18)^2 + 6^2} = \sqrt{460} = 2\sqrt{115}$, а его направляющие косинусы находим по формулам (19): $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{-10}{2\sqrt{115}} = \dfrac{-5}{\sqrt{115}} \approx -0,466$; $\quad \cos\beta = \dfrac{y}{|\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{-18}{2\sqrt{115}} = \dfrac{-9}{\sqrt{115}} \approx -0,839$; $\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{|\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{6}{2\sqrt{115}} = \dfrac{3}{\sqrt{115}} \approx 0,280$.

Проверим, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{-5}{\sqrt{115}}\right)^2 + \left(\frac{-9}{\sqrt{115}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{115}}\right)^2 = 1$. $\square$

Указание к заданию 6: При выполнении задания 6 можно использовать формулы (17), (16), (19) и пример 13.

Замечание. Если вектор задан на плоскости двумя координатами, то формулы (16) и (19) принимают вид:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}; \tag{16$'$}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}. \tag{19$'$}$$

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\ . \tag{20}$$

Если или $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}$=0.
Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \ \ (\vec{a}\neq\vec{0};\quad \vec{b}\neq\vec{0})$.
Скалярная проекция $пр_{\,\vec{b}}\,\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{21}$$

векторная проекция:

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}. \tag{22}$$

а косинус угла между векторами:

$$\cos\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{23}$$

Если заданы координаты двух векторов: $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$; $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, то скалярное произведение векторов и модуль вектора вычисляются по формулам (24) и (25):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2; \tag{24}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \tag{25}$$

ПРИМЕР 14. Найдите косинус угла NMP, где $M(1;2;-4), N(4;2;0)$, $P(-3;2;-1)$.

РЕШЕНИЕ. Найдем сначала координаты векторов $\overrightarrow{MN}$= {3;0;4} и $\overrightarrow{MP}${-4;0;3} (см. (16)), используя формулы (23) - (25), вычислим

$$\cos\angle NMP=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{MP}|}=\frac{3(-4)+0\cdot 0+4\cdot 3}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{9+16}}=0\Rightarrow\angle\text{NMP}=90^\circ\quad . \qquad \square$$

Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется

третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем требованиям:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$; (26)
2. $\vec{c}\perp\vec{a};\quad \vec{c}\perp\vec{b}$; (27)
3. тройка векторов ($\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$) – правая .

Если по крайней мере один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ равен нулю-вектору, то $\vec{a}\times\vec{b}=\overrightarrow{0}$.

Две основные задачи, связанные с векторным произведением:
1. нахождение площади параллелограмма (треугольника), построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах:

$$S_{\text{пар}} = 2S_\Delta = |\vec{a} \times \vec{b}|; \tag{26'}$$

2. нахождение вектора $\overrightarrow{N}$, перпендикулярного двум неколлинеарным векторам : если $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, то $\overrightarrow{N} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}),\ \lambda \in R,\ \lambda \neq 0$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Указание к заданию 7: Решение задания 7 основывается на свойствах векторного произведения:

1). $\vec{a} \times \vec{b}$=-$\vec{b} \times \vec{a}$;

2). $\vec{a} \times \vec{b}= \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$ (или $\lambda\vec{a}$=$\vec{b}$, или $\vec{b}=\overrightarrow{0}$ или $\vec{a}=\overrightarrow{0}$);

3). $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \overrightarrow{b} + \vec{a} \times \overrightarrow{c}$;

4). $\lambda\vec{a} \times \vec{b}$=$\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$=$\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

и формуле $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ (См. решение примера 15).

ПРИМЕР 15. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}$=$5\vec{m}-8\vec{n}$, $\vec{b}$=$-\vec{m}+2\vec{n}$, $|\vec{m}|$=1, $|\vec{n}|$=2, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})$= $\frac{3}{4}\pi$.

РЕШЕНИЕ. S_Δ=$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Найдем сначала: $\vec{a} \times \vec{b}$= $(5\vec{m}$-$8\vec{n}) \times (-\vec{m}+2\vec{n})$ = $5\vec{m}\times(-\vec{m}) + 5\vec{m}\times 2\vec{n} - 8\vec{n}\times(-\vec{m}) - 8\vec{n}\times 2\vec{n} = \overrightarrow{0} + 10\vec{m} \times \vec{n} + 8\vec{n} \times \vec{m} - \overrightarrow{0} =$ $10\vec{m} \times \vec{n} - 8\vec{m} \times \vec{n} = 2\vec{m} \times \vec{n}$.

Далее: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |2\vec{m} \times \vec{n}| = 2|\vec{m}||\vec{n}| \sin\,(\widehat{\vec{m},\vec{n}})= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Итак: $S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. $\square$

Если известны координаты векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ находится по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad . \tag{28}$$

ПРИМЕР 16. Найдите скалярную и векторную проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, где $\vec{a} = 2\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD}$ и $A(1;0;-1)$, $B(1;-1;-2)$, $C(4;1;0)$, $D(0;4;3)$, $O(0;0;0)$.

РЕШЕНИЕ. Скалярную $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ и векторную $\overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ проекции будем вычислять по формулам (21) и (22). Сначала найдем координаты следующих векторов: $\overrightarrow{AB} = \{0;-1;-1\}$, $\overrightarrow{CD} = \{-4;3;3\}$, $\overrightarrow{OC} = \{4;1;0\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-1;4;4\}$, $2\overrightarrow{AB} = \{2 \cdot 0; 2(-1); 2(-1)\} = \{0;-2;-2\}$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \{0-(-4); -2-3; -2-3\} = \{4;-5;-5\}$,

$\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 16\vec{j} + 17\vec{k} = \{4; -16; 17\}$.

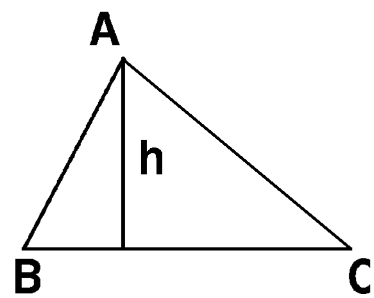
Подсчитаем скалярное произведение (см. (24)) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4 + (-5) \cdot (-16) + (-5) \cdot 17 = 11$; модуль $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-16)^2 + 17^2} = \sqrt{561}$. Теперь

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{561}}; \qquad \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{561}} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{561}\vec{b} =$$
$$= \left\{\frac{11}{561} \cdot 4; \frac{11}{561} \cdot (-16); \frac{11}{561} \cdot 17\right\} = \left\{\frac{44}{561}; \frac{-176}{561}; \frac{187}{561}\right\}. \quad \square$$

Указание к заданию 8. При решении задания 8 используйте формулы (16),(21),(22),(24),(25),(28) и пример 16.

ПРИМЕР 17: Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из вершины A, где $A(1;3;5)$, $B(0;-1;-3)$, $C(4;2;-3)$.

РЕШЕНИЕ. Площадь треугольника ABC можно найти как половину модуля векторного произведения: $S_{\Delta ABC} = 0,5|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$.



Сначала найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = \{1;4;8\}$; $\overrightarrow{BC} = \{4;3;0\}$;

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= -24\vec{i} + 32\vec{j} - 13\vec{k}$. Далее: $|\overrightarrow{\text{BA}} \times \overrightarrow{\text{BC}}| = \sqrt{(-24)^2 + 32^2 + (-13)^2} = \sqrt{1769}$. Следовательно, $S_{\Delta ABC} = 0,5\sqrt{1769} \approx 21,03$.

Из школы известно, что $\text{S}_{\Delta ABC} = 0,5\,h \cdot BC$. Длина основания $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$, поэтому $0,5\sqrt{1769} = 0,5 \cdot h \cdot 5$ и $h = \dfrac{\sqrt{1769}}{5} \approx 8,41$. $\square$

Указание к заданию 9. Решение задания 9 аналогично решению примера 17, где использованы формулы (16),(25) и (28).

ПРИМЕР 18. Найдите вектор $\overrightarrow{N}$, перпендикулярный плоскости $\text{M}_1\text{M}_2\text{M}_3$, где M_1(1;3;0) , M_2 (-2;1;-1), M_3 (0;1;-1).

РЕШЕНИЕ. Из перпендикулярности вектора $\overrightarrow{N}$ плоскости $M_1M_2M_3$ следует, что $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{M_1M_3}$, тогда $\overrightarrow{N}=\lambda(\overrightarrow{M_1M_2}\text{x}\overrightarrow{M_1M_3})$, если $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ – неколлинеарные векторы. $\overrightarrow{M_1M_2}=$ {-3;-2;-1}; $\overrightarrow{M_1M_3}$={-1;-2;-1}. Так $\frac{-3}{-1}\neq\frac{-2}{-2}$, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ неколлинеарные и $\overrightarrow{N}=\lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=$

$= \lambda\ (0\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k})$={0;-1;2} ($\lambda$=0.5).

Итак: $\overrightarrow{N}$={0;-1;2}. □

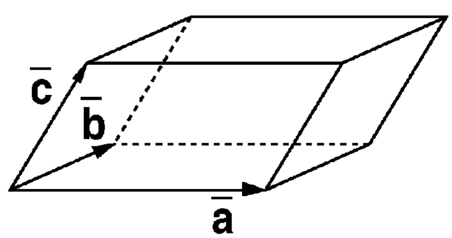
Замечание: За вектор, перпендикулярный плоскости $M_1M_2M_3$, можно взять *любой ненулевой* вектор, коллинеарный векторному произведению $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Модуль этого числа равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах:

$$V_{\text{парал.}} = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|, \tag{29}$$



поэтому объем треугольной пирамиды, построенной на тех же векторах, равен:

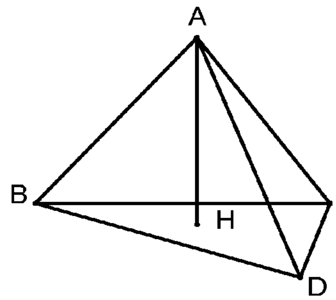
$$V_{\text{тр. пир.}} = \frac{1}{6}\cdot V_{\text{парал.}} = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|. \tag{30}$$

Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы *компланарны*.

Если заданы векторы своими координатами: $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то их смешанное произведение равно:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{31}$$

ПРИМЕР 19. Найдите объем пирамиды $ABCD$ и длину высоты AH, опущенной из вершины A, где $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$.



РЕШЕНИЕ. Из школы известно, что $V_{\text{тр.пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$, следовательно $AH = h = \frac{3V_{\text{тр.пир.}}}{S_{\text{осн.}}}$. Используя формулы (30) и (26′), получим

$$AH = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}|}{\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|}. \qquad (32)$$

Вычислим модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{BA}$ ={3;-1;1} $\overrightarrow{BC}$ ={6;8;-5}, $\overrightarrow{BD}$={2;1;-2}: $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-16 + 5) + 1 \cdot (-12 + 10) + 1 \cdot (6 - 16) = -45$; $|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}| = |-45| = 45$.

Объем пирамиды $ABCD$ равен: $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{6} \cdot 45 = 7,5$.

Далее вычислим: $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$ и

$|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \sqrt{225} = 15$. По формуле (32): $AH = \frac{|(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{45}{15} = 3$. □

Указание к заданию 10. Выполняется задание 10 аналогично решению примера 19, где использованы формулы (16),(25),(28),(30)-(32).

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Ненулевой вектор $\overrightarrow{S}$, параллельный прямой l, называется *направляющим вектором* прямой. Ненулевой вектор $\overrightarrow{N}$, перпендикулярный прямой l, называется *вектором нормали* прямой l.

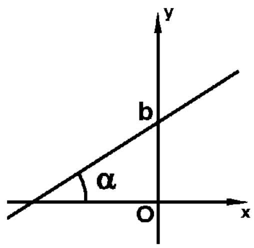


Рис. 1

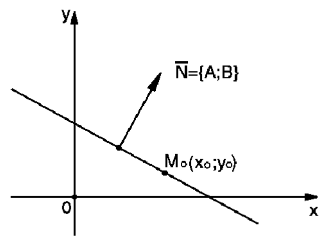


Рис. 2

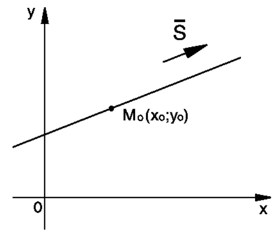


Рис. 3

Запишем различные уравнения прямой на плоскости:

1. $y = kx + b,\ k = tg\alpha$ (рис.1); (33)

2. $y - y_0 = k(x - x_0),\ k = tg\alpha$ – (34)
уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k;

3. $Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$ – (35)
общее уравнение прямой (вектор нормали прямой: $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$);

4. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0$ – (36)
уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным вектором нормали $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$ (рис.2);

5. $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n},\ m^2 + n^2 \neq 0$ – (37)
каноническое уравнение прямой (направляющий вектор $\overrightarrow{S} = \{m; n\};\ M_0(x_0; y_0)$), рис.(3);

6. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – (38)
уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M(x_2; y_2)$.

Угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1x + b_1$ и l_2: $y = k_2x + b_2$ определяется по формуле:

$$tg\alpha = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \geq 0. \qquad (39)$$

Из формулы (39) следует, что :

$$1) l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}; \quad 2)\, l_1 \| l_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k_2. \qquad (40)$$

ПРИМЕР 20. Найдите координаты центра описанной около треугольника ABC окружности, где $A(0; 3),\ B(2; 5),\ C(-2; 7)$.

РЕШЕНИЕ. Центр описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения срединных перпендикуляров. Пусть D – середина отрезка AC, тогда по формуле $(17')$ $D = \left(\dfrac{x_A + x_C}{2}; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$ или $D(-1; 5)$.

Составим уравнение прямой l_1, проходящей через точку D перпендикулярно вектору $\vec{N}_1 = \overrightarrow{AC} = \{-2; 4\} : -2(x+1) + 4(y-5) = 0; \quad l_1 : \; x - 2y + 11 = 0.$ Аналогично, найдя середину $K(0; 6)$ отрезка BC, составим уравнение срединного перпендикуляра $l_2 : \; 2x - y + 6 = 0$ к отрезку BC. Пересечение прямых l_1 и l_2 определяет центр S описанной окружности: $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases};$ $S\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{16}{3}\right).$ □

Указание к заданию 11. При выполнении задания 11 воспользуйтесь формулами (16), (17′), (36) и решением примера 20.

ПРИМЕР 21. Даны две вершины $A_1(2; 4)$ и $A_2(3; 1)$ треугольника $A_1A_2A_3$ и точка $N(4; 0)$ пересечения его медиан. Составьте уравнения сторон этого треугольника и определите координаты третьей вершины A_3.

РЕШЕНИЕ. Координаты вершины A_3 можно найти из соотношений (18′): $x_N = \dfrac{x_{A_1} + x_{A_2} + x_{A_3}}{3}; \; y_N = \dfrac{y_{A_1} + y_{A_2} + y_{A_3}}{3}$. Поэтому $x_{A_3} = 3x_N - x_{A_1} - x_{A_2} = 3 \cdot 4 - 2 - 3 = 7; \; y_{A_3} = 3y_N - y_{A_1} - y_{A_2} = 3 \cdot 0 - 4 - 1 = -5, \; A_3(7; -5).$

Для составления уравнений сторон треугольника $A_1A_2A_3$ воспользуемся формулой (38). Тогда $(A_1A_2) : \dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y-4}{1-4}$ или $3x + y - 10 = 0;$ $(A_1A_3) : \quad 9x + 5y - 38 = 0; \; (A_2A_3) : \quad 3x + 2y - 11 = 0.$ □

Указание к заданию 12. При выполнении задания 12 воспользуйтесь формулами (18′), (38) и решением примера 21.

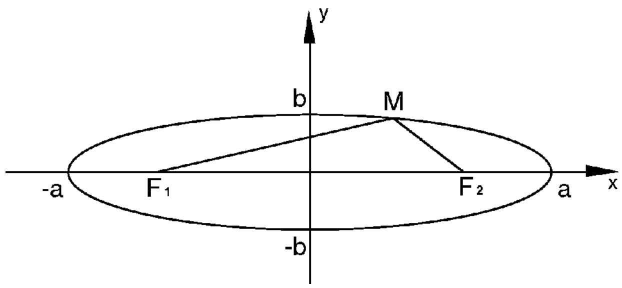
ПРИМЕР 22. Даны две вершины $A_1(1; 0)$ и $A_2(3; 5)$ треугольника $A_1A_2A_3$ и точка $N(-1; 3)$ пересечения его высот. Определите координаты третьей вершины A_3.

РЕШЕНИЕ. Вектор $\overrightarrow{A_1N} = \{-2; 3\}$ является вектором нормали для прямой (A_2A_3) и т.к. координаты точки A_2 известны, то по формуле (36) уравнение прямой (A_2A_3) примет вид: $-2(x-3) + 3(y-5) = 0; \; 2x - 3y + 9 = 0.$ Вектор $\overrightarrow{A_2N} = \{-4; -2\} \perp (A_1A_3)$, поэтому $\vec{n} = -0,5\overrightarrow{A_2N} = \{2; 1\}$ можно взять за вектор нормали к стороне (A_1A_3) и по формуле (36) составить уравнение прямой $(A_1A_3) : \; 2x + y - 2 = 0$. Решив систему уравнений, задающих прямые (A_1A_3) и (A_2A_3), найдем координаты вершины $A_3 : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 9 = 0 \end{cases};$ $A_3\left(-\dfrac{3}{8}; \dfrac{11}{4}\right).$ □

Указание к заданию 13. Перед выполнением задания 13 разберите решение примера 22, где использованы формулы (16) и (36).

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Эллипсом называется множество точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами,* есть величина постоянная, большая F_1F_2 : $\quad MF_1 + MF_2 = 2a > F_1F_2$.



Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{41}$$

$a-$ большая, $b-$ малая полуоси эллипса $(a > b)$,

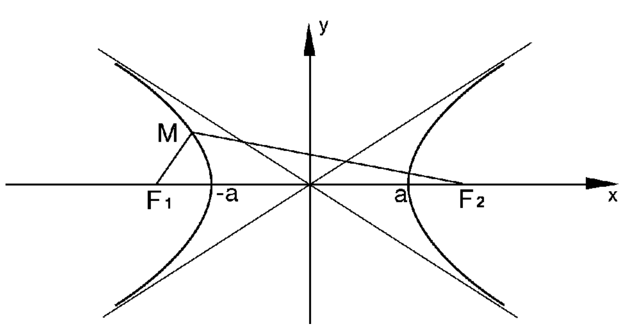
$$a^2 - b^2 = c^2; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \ (\varepsilon < 1), \tag{42}$$

$\varepsilon-$ эксцентриситет эллипса, левый фокус: $F_1(-c; 0)$; правый – $F_2(c; 0)$; $\quad O(0; 0)$ – центр эллипса.
Уравнения директрис: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Если в уравнении (41) $a < b$, то $b^2 - a^2 = c^2$, $\ \varepsilon = \dfrac{c}{b}$, фокусы $F_1(0; -c)$; $F_2(0; c)$ лежат на оси Oy. $\quad y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.

Если $a = b = r$, то $c = 0 \Rightarrow F_1(-c; 0) = F_2(c; 0) = O(0; 0)$; $\varepsilon = 0$ и уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ определяет окружность радиуса r с центром в начале координат.

Гиперболой называется множество точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая F_1F_2 : $\ |MF_1 - MF_2| = 2a < F_1F_2$.



Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{43}$$

где a – действительная полуось; b – мнимая полуось;

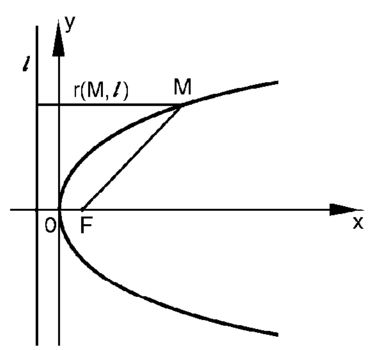
$$a^2 + b^2 = c^2;\ \varepsilon = \frac{c}{a} > 1, \tag{44}$$

ε - эксцентриситет гиперболы, левый фокус: $F_1(-c;0)$; правый фокус $F_2(c;0)$; $O(0;0)$ – центр гиперболы; $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис;

$y = \pm\frac{b}{a}x$ – уравнения асимптот гиперболы. (45)

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу, сопряженную гиперболе (43); асимптоты у них совпадают; фокусы сопряженной гиперболы располагаются на оси Оу; a – мнимая полуось; b – действительная; $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Параболой называется множество точек M плоскости, равноудаленных от данной точки F (*фокуса*) и от данной прямой l (*директрисы*): $MF = r(M, l)$.



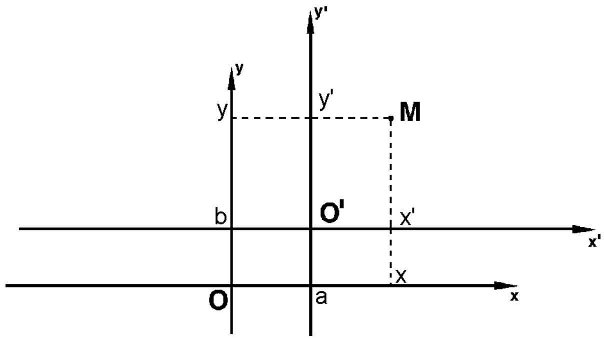
Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ох:
$y^2 = 2px$, $\quad F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус; $x = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (46)

Если парабола симметрична относительно оси Оу, то ее уравнение:
$x^2 = 2py$; $\quad F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ — фокус; $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (47)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ОСЕЙ КООРДИНАТ

Пусть точка M имеет координаты $(x;y)$ в системе Oxy и $(x';y')$ – в системе $O'x'y'$, причем новое начало O' в старой системе имеет координаты $(a;b)$, тогда

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}. \tag{48}$$



ПРИМЕР 23. Приведите уравнение кривой к каноническому виду, постройте старые, новые оси координат и заданную кривую, найдите, если возможно, центр, полуоси, фокусы, директрисы, асимптоты и эксцентриситет кривой: $4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x - 89 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Выделим полный квадрат из выражений $4x^2 - 24x$ и $-25y^2 + 50y$:

$$4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x) = 4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9) = 4(x-3)^2 - 36;$$

$$-25y^2 + 50y = -25(y^2 - 2y) = -25(y^2 - 2y + 1 - 1) = -25(y-1)^2 + 25.$$

Перепишем исходное уравнение:

$$4(x-3)^2 - 36 - 25(y-1)^2 + 25 - 89 = 0, \quad 4(x-3)^2 - 25(y-1)^2 = 100,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Введем новые координаты: $x - 3 = x'$; $y - 1 = y'$, т.е. перейдем к новой системе координат $O'x'y'$, где $O'(3;1)$ $(x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ и $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1)$. В новой системе координат уравнение

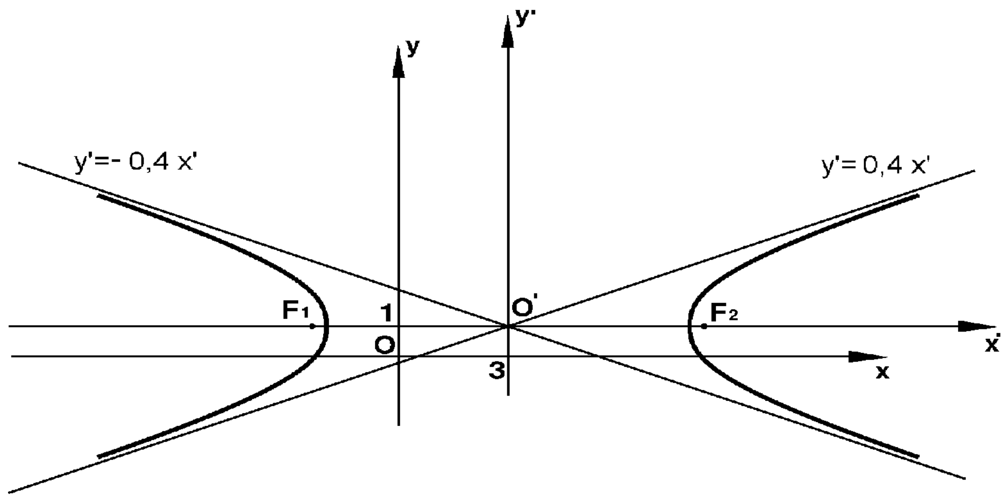
$$\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{4} = 1$$

определяет гиперболу. Ее действительная полуось $a = \sqrt{25} = 5$; мнимая полуось $b = \sqrt{4} = 2$, $y' = \pm\dfrac{2}{5}x'$ — уравнения асимптот;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \Rightarrow F_1(-\sqrt{29}; 0); \quad F_2(\sqrt{29}; 0), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5} > 1.$$

Координаты фокусов заданы в системе координат $O'x'y'$.

Уравнения директрис: $x' = \pm\dfrac{25}{\sqrt{29}}$. $\square$



ПРИМЕР 24. Приведите уравнение кривой $4y^2+8y+2x-5=0$ к каноническому виду.

РЕШЕНИЕ. Выделим полный квадрат из выражения: $4y^2+8y=4(y^2+2y+1-1)=4(y+1)^2-4$.

Уравнение кривой примет вид: $4(y+1)^2-4+2x-5=0 \Rightarrow 4(y+1)^2=-2x+9 \Rightarrow 4(y+1)^2=-2(x-4,5)$. Делаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x-4,5 &= x' \\ y+1 &= y' \end{cases}.$$

В новой системе координат получаем уравнение: $4(y')^2=-2x'$ или $(y')^2=-0,5x'$. Последнее уравнение — каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси $O'x'$.

$2p=-0,5,\ \ p=-0,25;$ координаты фокуса $F(p/2;0)$: $F(-0,125;0)$.

Уравнение директрисы: $x'=-\dfrac{p}{2} \Rightarrow x'=0,125.$ □

Указание к заданию 14. Задание 14 выполняется с использованием формул (41)–(48) и примеров 23 и 24.

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Ненулевой вектор $\overrightarrow{N}$, перпендикулярный плоскости, называется *вектором нормали плоскости.*

Общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2\neq 0, \tag{49}$$

где вектор нормали $\overrightarrow{N}=\{A;B;C\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с данным вектором нормали $\overrightarrow{N}=\{A;B;C\}\neq\overrightarrow{0}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (50)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (51)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (52)$$

Косинус угла между плоскостями α_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и α_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ вычисляется по формуле:

$$\cos\,(\alpha_1 \overset{\wedge}{,} \alpha_2)=\pm\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}|\cdot|\overrightarrow{N_2}|}=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\geq 0. \qquad (53)$$

Перед дробью надо выбрать такой знак, чтобы косинус был неотрицательным числом, т.к. угол между плоскостями не превышает 90°.

Если $\alpha_1\perp\alpha_2$, то $\overrightarrow{N}_1\perp\overrightarrow{N}_2$; если $\alpha_1\|\alpha_2$, то $\overrightarrow{N}_1||\overrightarrow{N}_2$.

ПРИМЕР 25. Составьте уравнение плоскости α, параллельной оси Ox и проходящей через точки $A(1;0;5)$ и $B(0;-4;8)$.

РЕШЕНИЕ. Для составления уравнения плоскости α будем использовать формулу (51), где $M_0=A(1;0;5)$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{-1;-4;3\}$; $\vec{b}=\vec{i}=\{1;0;0\}$.

Замечание. Векторы $\vec{i}=\{1;0;0\}$; $\vec{j}=\{0;1;0\}$ и $\vec{k}=\{0;0;1\}$ задают соответственно положительные направления осей Ox; Oy и Oz.

Итак,

$$\alpha:\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3y+4z-20=0. \quad \square$$

Указание к заданию 15. При выполнении задания 15 используйте формулы (16),(51) и решение примера 25.

ПРИМЕР 26. Найдите угол между плоскостями $\alpha_1:\ x-y+80=0$ и $\alpha_2:\ 3x+4y+5z-17=0$.

РЕШЕНИЕ. Для нахождения косинуса угла между плоскостями α_1 и α_2, надо знать только их векторы нормали: $\overrightarrow{N_1}=\{1;-1;0\}$ и $\overrightarrow{N_2}=\{3;4;5\}$. По формуле (53) $\cos\,(\alpha_1\overset{\wedge}{,}\alpha_2)=\pm\dfrac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}=\pm\dfrac{1\cdot3-1\cdot4+0\cdot5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}=0,1$, а сам угол $(\alpha_1\overset{\wedge}{,}\alpha_2)=\arccos 0,1\approx 84,3^\circ$. □

Указание к заданию 16. Воспользуйтесь формулами (49), (53) и решением примера 26.

ПРИМЕР 27. Найдите расстояние от точки $P(0;-1;5)$ до плоскости α, проходящей через точку $A(8;1;-2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{1;2;-2\}$.

РЕШЕНИЕ. Искомое расстояние можно найти как модуль скалярной проекции вектора $\overrightarrow{PA}=\{8;2;-7\}$ на вектор $\vec{n}=\{1;2;-2\}$:

$$r=\left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{PA}\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}}{|\vec{n}|}\right|=\frac{8+4+14}{3}=\frac{26}{3}.\quad\Box$$

Указание к заданию 17. Его можно выполнять аналогично примеру 27 или сначала составить уравнение плоскости α по формуле (50), а затем искомое расстояние r подсчитать как

$r=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ и $P(x_0;y_0;z_0)$.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Ненулевой вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором прямой.*

Прямая в пространстве определяется уравнениями:

1) каноническими:

$$l:\quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\tag{54}$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка, лежащая на прямой; $\overrightarrow{S}=\{m;n;p\}$ $(m^2+n^2+p^2\neq0)$ – направляющий вектор прямой;

2) через две различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$

$$l:\quad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};\tag{54$'$}$$

3) параметрическими:

$$l:\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \qquad t\in(-\infty;\infty), \\ z=z_0+pt, \end{cases} \tag{55}$$

(между точками прямой и значениями параметра t установлено взаимно однозначное соответствие). Если в параметрических уравнениях исключить параметр t, то получим канонические уравнения.

4) общими, т.е. как пересечение двух непараллельных плоскостей:

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \tag{56}$$

где $\overrightarrow{N_1}=\{A_1;B_1;C_1\}\neq\lambda\overrightarrow{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$.

Направляющий вектор $\overrightarrow{S}$ прямой l можно найти как векторное произведение векторов нормали: $\overrightarrow{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ и $\overrightarrow{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$:

$\overrightarrow{S}=\overrightarrow{N}_1\times\overrightarrow{N}_2$.

Косинус угла между двумя прямыми l_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и l_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ находим по формуле:

$$\cos(l_1\hat{,}l_2)=\pm\frac{\overrightarrow{S}_1\cdot\overrightarrow{S}_2}{|\overrightarrow{S}_1|\cdot|\overrightarrow{S}_2|}=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\geq 0 \tag{57}$$

(знак выбираем “+” или “-” так, чтобы косинус был неотрицательным, т.к. угол между прямыми заключен в интервале от 0^o до 90^o).

Угол между прямой l: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью α: $Ax+By+Cz+D=0$ находим с помощью формулы:

$$\sin(l\hat{,}\alpha)=\pm\frac{\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{S}|\cdot|\overrightarrow{N}|}=\pm\frac{m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\geq 0 \tag{58}$$

(знак выбираем “+” или “-” так, чтобы синус был неотрицательным, т.к. угол между прямой и плоскостью заключен в интервале от 0^o до 90^o).

ПРИМЕР 28. Составьте канонические и параметрические уравнения высоты l, опущенной на плоскость (BCD) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(0;5;-2)$, $B(1;2;-1)$, $C(4;5;0)$, $D(1;1;1)$.

РЕШЕНИЕ. Векторы $\overrightarrow{BC}=\{3;3;1\}$ и $\overrightarrow{BD}=\{0;-1;2\}$ не коллинеарны, поэтому вектор $\vec{S}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{7;-6;-3\}$ перпендикулярен плоскости (BCD). Его можно взять за направляющий вектор $\vec{S}$ высоты l. Канонические уравнения высоты l, проходящей через точку A с направляющим вектором $\vec{S}$, имеют вид (54): $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y-5}{-6} = \dfrac{z+2}{-3}$; а параметрические (55): $\begin{cases} x = 7t \\ y = 5 - 6t \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$ □

Указание к заданию 18. Воспользуйтесь формулами (16), (28), (54), (55) и решением примера 28.

ПРИМЕР 29. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости xOz.

РЕШЕНИЕ. Вектор $\vec{j} = \{0;1;0\}$ задает направление, перпендикулярное плоскости xOz (т.е. параллельное оси Oy). Уравнения заданной прямой $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{0}$ – канонические и $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$ – параметрические.
□

Указание к заданию 19. Воспользуйтесь формулами (54), (55), замечанием к примеру 25 и решением примера 29. В канонических уравнениях (54) допускается запись "деление на 0". Её надо понимать так: в знаменателях дробей стоят координаты направляющего вектора, среди которых могут быть нули.

ПРИМЕР 30. Найдите угол между прямыми l_1 и l_2, где
$l_1: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-5}{-1}$ и $l_2: \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0; \\ 2x - z + 8 = 0. \end{cases}$

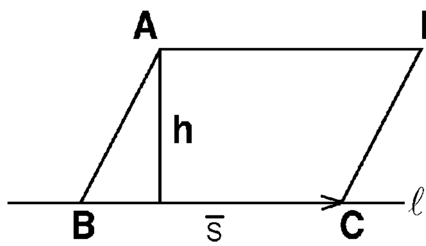
РЕШЕНИЕ. Вектор $\overrightarrow{S_1} = \{2;2;-1\}$ – направляющий вектор прямой l_1. Вторая прямая задана общими уравнениями (56). Направляющий вектор $\overrightarrow{S_2}$ этой прямой вычислим как векторное произведения векторов нормали $\overrightarrow{N_1} = \{1;1;-2\}$ и $\overrightarrow{N_2} = \{2;0;-1\}$ плоскостей, задающих прямую l_2. Тогда $\overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \{-1;-3;-2\}$. Вычислим сначала

$$\cos\,(l_1 \widehat{,} l_2) = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}| \cdot |\overrightarrow{S_2}|} = \pm\frac{2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2)}{3 \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0,535.$$

Следовательно, $(l_1 \widehat{,} l_2) \approx 57,7^\circ$. □

Указание к заданию 20. Задание выполняется с использованием формул (54),(56),(58),(28),(23) - (25) (см. решение примера 30).

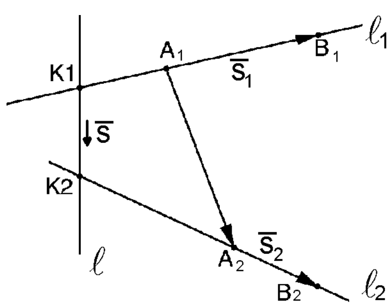
ПРИМЕР 31. Найдите расстояние от точки $A(1;1;-1)$ до прямой l : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$.



РЕШЕНИЕ. Расстояние от точки $A(1;1;-1)$ до прямой l, заданной точкой $B(2;-3;1)$ и направляющим вектором $\overrightarrow{S}=\{1;-2;-2\}$ можно найти как высоту параллелограмма $ABCD\,(\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{S})$: $h=\dfrac{S_{\text{пар.}}}{BC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|}{|\overrightarrow{BC}|}=$
$\dfrac{\left|\overrightarrow{S}\times\overrightarrow{BA}\right|}{|\overrightarrow{S}|}=\dfrac{|12\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}|}{|\overrightarrow{S}|}=\dfrac{2\sqrt{41}}{3}\approx 4,27.$ $\square$

Указание к заданию 21. Выполняется задание 21 аналогично решению примеров 31 и 17.

ПРИМЕР 32. Найдите расстояние между прямыми $l_1:\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z+1}{1}$ и $l_2:\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.



РЕШЕНИЕ. Прямые l_1 и l_2 заданы соответственно точками $A_1(2;-1;-1)$, $A_2(3;0;-3)$ и направляющими векторами $\overrightarrow{S_1}=\overrightarrow{A_1B_1}=\{1;0;1\}$, $\overrightarrow{S_2}=\overrightarrow{A_2B_2}=\{3;1;2\}$. Эти прямые будут скрещивающимися, если векторы $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}=\{1;1;-2\}$ – некомпланарные, т.е. их смешанное произведение не равно нулю. Проверим это утверждение:

$$(\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2})\cdot\overrightarrow{A_1A_2}=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&2\\1&1&-2\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Для двух скрещивающихся прямых l_1 и l_2 существует единственный общий перпендикуляр l. Обозначим: $K_1 = l \cap l_1$, $K_2 = l \cap l_2$, тогда K_1K_2 и есть расстояние между прямыми l_1 и l_2. Но $K_1K_2 = |\text{пр}_{\vec{S}}\overrightarrow{A_1A_2}|$, где $\overrightarrow{S}$ – направляющий вектор общего перпендикуляра l. Так как $\overrightarrow{S} \perp \overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S} \perp \overrightarrow{S_2}$, то

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \{-1; 1; 1\}.$$

Тогда $K_1K_2 = |\text{пр}_{\vec{S}}\overrightarrow{A_1A_2}| = \left| \dfrac{\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}}{|\overrightarrow{S}|} \right| = \left| \dfrac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1(-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ □

Указание к заданию 22. Задание 22 можно выполнить аналогично решению примера 32. Второй способ решения заключается в следующем: длину K_1K_2 общего перпендикуляра можно найти как высоту параллелепипеда, натянутого на векторы $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$h = \frac{|(\overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}|}{|\overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}|}. \tag{59}$$

ПРИМЕР 33. Найдите угол между плоскостью $\alpha:\ 2x + 3y + z + 1 = 0$ и прямой $l:\ \dfrac{x-17}{-4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+13}{3}$ и точку их пересечения.

РЕШЕНИЕ. Синус угла между направляющим вектором $\overrightarrow{S} = \{-4; 1; 3\}$ прямой l и вектором нормали $\overrightarrow{N} = \{2; 3; 1\}$ плоскости α равен

$$\sin (\widehat{\alpha, l}) = \pm \frac{\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{S}| \cdot |\overrightarrow{N}|} = \pm \frac{-4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{364}} \approx 0,1048$$

$$(\widehat{\alpha, l}) = \arcsin \frac{2}{\sqrt{364}} \approx 6,02^\circ.$$

Теперь найдем точку $H = \alpha \cap l$. Для этого составим систему, содержащую уравнение плоскости α и параметрические уравнения прямой l :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ x = 17 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = -13 + 3t \end{cases}.$$

Подставляя $x; y; z$ из последних трех уравнений системы в первое уравнение, получим: $2(17-4t) + 3(-2+t) + (-13+3t) + 1 = 0$, $t = 8$. Из параметрических уравнений прямой l при $t = 8$ находим координаты точки $H(-15; 6; 11)$. □

Указание к заданию 23. Воспользуйтесь формулами (54), (55), (58) и решением примера 33.

ПРИМЕР 34. Найдите точку Q, симметричную точке $P(-9;-13;-3)$ относительно плоскости $\alpha: 5x+7y+z-11=0$.

РЕШЕНИЕ. Проекцию H точки P на плоскость α можно найти как точку пересечения перпендикуляра PH и плоскости α.

Нормальный вектор $\overrightarrow{N}=\{5;7;1\}$ плоскости α может выполнить роль направляющего вектора $\overrightarrow{S}$ прямой PH. $\begin{cases} x=-9+5t \\ y=-13+7t \\ z=-3+t \end{cases}$ – параметрические уравнения перпендикуляра PH. Точка H одновременно принадлежит прямой и плоскости, поэтому ее координаты находим, решая совместно систему из уравнений прямой и плоскости. Подставляя $(x;y;z)$ из последней системы в уравнение плоскости α получим $5(-9+5t)+7(-13+7t)+(-3+t)-11=0 \Rightarrow t=2$. Подставляя значение $t=2$ в параметрические уравнения, получим координаты точки H: $x=1;\ y=1;\ z=-1;\quad H(1;1;-1)$.
Точка H является серединой отрезка PQ , поэтому, используя формулы $(17')$, получим: $x_H=\dfrac{x_P+x_Q}{2};\ 1=\dfrac{-9+x_Q}{2};\ x_Q=11;$
$y_H=\dfrac{y_P+y_Q}{2};\ 1=\dfrac{-13+y_Q}{2};\ y_Q=15;$
$z_H=\dfrac{z_P+z_Q}{2};\ -1=\dfrac{-3+y_Q}{2};\ z_Q=1.\quad Q(11;15;1).\quad \square$

Указание к заданию 24. Можно использовать формулы (55), (49), $(17')$ и решение примера 34.

ПРИМЕР 35. Найдите точку Q, симметричную точке $P(3;2;-1)$ относительно прямой l: $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$.

РЕШЕНИЕ. Сначала найдем основание H перпендикуляра, опущенного на прямую l. Точка H является пересечением прямой l и плоскости α, перпендикулярной прямой l и проходящей через точку P. Для плоскости α вектором нормали $\overrightarrow{N}$ может служить направляющий вектор $\overrightarrow{S}$ прямой l: $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{S}=\{2;2;1\}$.
Уравнение плоскости α: $2(x-3)+2(y-2)+1(z+1)=0 \Rightarrow 2x+2y+z-9=0$.
Параметрические уравнения прямой l имеют вид:

$$l: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}.$$

Подставляя x,y,z из параметрических уравнений прямой l в уравнение плоскости α, находим параметр t, который соответствует точке H:

$$2(-1+2t)+2(1+2t)+t-9=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(1;3;1).$$

Точка H является серединой отрезка PQ. Пусть координаты искомой точки Q будут $(x;y;z)$, тогда, используя формулу (17'), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{3+x}{2}=1 \\ \\ \dfrac{2+y}{2}=3 \\ \\ \dfrac{-1+z}{2}=1 \end{cases}, \quad Q(-1;4;3). \quad \square$$

Указание к заданию 25. При выполнении задания 25 можно использовать формулы (54), (55), (49), (17′) и решение примера 35.

Литература

по РГР 1.2, которую можно приобрести на кафедре высшей математики.

1. Гуревич В.М., Ермаков П.В. Методические указания для самостоятельной работы студентов по курсу "Высшая математика" (Линейная алгебра).
2. Студентам для подготовки к аттестации по курсу высшей математики. 1-й семестр. С использованием опыта тестирования зарубежных и отечественных вузов.

Расчетно-графическая работа N 1.2
Линейная алгебра
Аналитическая геометрия

1. Найдите решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и матричным методом (с использованием обратной матрицы):

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 3x_3 = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 18x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1 \\ -10x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 - 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -10x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \\ 8x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 3 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 8x_2 - x_3 = 1 \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ -7x_1 + 6x_2 - 10x_3 = 1 \\ -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 0 \\ 3x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ 13x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ 8x_1 - 5x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ -5x_1 + 3x_2 + 8x_3 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

2. С помощью теоремы Кронекера-Капелли исследуйте совместность системы линейных уравнений. В случае совместности найдите общее решение методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - 13x_3 - x_4 = 36 \\ -4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 = -19 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ 19x_1 + 5x_2 - 22x_3 - 2x_4 = 61 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 36 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 7x_1 + 23x_2 - 48x_3 - 9x_4 = -19 \\ 3x_1 + 7x_2 - 12x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 23 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 - 2x_4 = -7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -6 \\ 20x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 12 \\ 10x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 12x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 19 \\ 13x_1 + 3x_2 - 14x_3 - 2x_4 = 39 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 19x_1 - 21x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 18 \\ 7x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 13x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 9x_1 + 31x_2 - 66x_3 - 13x_4 = -33 \\ 3x_1 + 8x_2 - 15x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 12x_3 - 3x_4 = -13 \\ 5x_1 + 18x_2 - 39x_3 - 8x_4 = -23 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 13x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 9 \\ 8x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 11x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x_1 + 16x_2 + 10x_3 - 29x_4 = -1 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 12x_4 = 3 \\ 3x_1 - 12x_2 - 2x_3 + 19x_4 = -13 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_1 + 25x_2 + 9x_3 - 42x_4 = 15 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 12x_4 = 3 \\ x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 17x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 5 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x_1+3x_2-9x_3+5x_4=0\\ 2x_2+x_3+x_4=7\\ 7x_1-3x_2-12x_3+2x_4=-21\\ 3x_1-x_2-5x_3+x_4=-8 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -13x_1+3x_2+21x_3-5x_4=30\\ 7x_1-3x_2-12x_3+2x_4=-21\\ x_1-3x_2-3x_3-x_4=-12\\ x_1+x_2-x_3+x_4=2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 9x_1+4x_2+29x_3+3x_4=-5\\ x_1-3x_3-x_4=-1\\ 5x_1+2x_2+13x_3+x_4=-3\\ 2x_1+x_2+8x_3+x_4=-1\\ -4x_4-x_2-2x_3+x_4=3 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=17\\ 5x_1+2x_2-x_3=2\\ x_1+x_2+x_3=7\\ -3x_1-x_2+x_3=1\\ 4x_1+x_2-2x_3=-5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3-x_4=-10\\ x_1+x_2+x_3+x_4=6\\ x_1-x_2-x_3+x_4=4\\ x_1-3x_2-3x_3-x_4=3 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 14x_2-7x_3-21x_4=21\\ x_1-5x_2+3x_3+6x_4=-4\\ 2x_1+4x_2-x_3-9x_4=13\\ x_1-x_2+x_3=2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+36x_3+7x_4=1\\ 6x_1+x_2-4x_3-3x_4=-5\\ 10x_1+2x_2+12x_3-x_4=-7\\ 5x_1+2x_2+13x_3+x_4=-3 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 4x_1+34x_2-15x_3-57x_4=65\\ 2x_1+8x_2-3x_3-15x_4=19\\ x_1-5x_2+3x_3+6x_4=-4\\ x_1+7x_2-3x_3-12x_4=14 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 8x_1-9x_2+6x_3+5x_4=11\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=15\\ 3x_1-6x_2+4x_3+x_4=-2\\ x_1-9x_2+6x_3-2x_4=-17 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 22x_1+3x_2-2x_3+x_4=15\\ 8x_1+x_2-x_3+x_4=6\\ 10x_1+2x_2+x_3+5x_4=3\\ 14x_1+2x_2-x_3+3x_4=9 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1+9x_2-6x_3+5x_4=29\\ 3x_2-2x_3+x_4=14\\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=15\\ 2x_1-9x_2+6x_3+x_4=-13\\ x_1-6x_2+4x_3-x_4=-10 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-9x_3-x_4=7\\ x_1+2x_2-5x_3-x_4=1\\ x_1-x_2+4x_3+2x_4=7\\ x_1+4x_2-11x_3-3x_4=-3\\ 3x_1+5x_2-12x_3-2x_4=5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 7x_1+16x_2+10x_3-19x_4=41\\ x_1+7x_2+3x_3-9x_4=9\\ 3x_1-12x_2-2x_3+17x_4=5\\ 2x_1-7x_2-x_3+10x_4=4 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4+3x_5=11\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4+5x_5=-8\\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4+8x_5=4\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_4=13\\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=8\\ 4x_1+x_2+x_3+3x_4=18\\ 3x_1+4x_2-9x_3-4x_4=7\\ 2x_1+3x_2-7x_3-x_4=4 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x_1-x_2+15x_3+3x_4=-5\\ x_1+x_2-7x_3-x_4=9\\ 13x_1+5x_2-19x_3-x_4=53\\ 7x_1+x_2+5x_3+2x_4=15\\ x_1-3x_2+29x_3+5x_4=-23 \end{cases}$

3. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 12. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ 14. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -10 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ 18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -2 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -6 & 2 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ 20. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

21. $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}$ 22. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

23. $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 24. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

25. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 26. $A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

27. $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$ 28. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 12 & -4 & -12 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$ 30. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$

4. Разложите, если это возможно, вектор $\vec{a}$ по векторам $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, если

1. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(1;3;6),\ B(2;2;1),\ C(-1;0;1),\ D(-4;6;-3), O(0;0;0).$
2. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(-4;2;6),\ B(2;-3;0),\ C(-10;5;8),\ D(-5;2;-4), O(0;0;0).$
3. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(7;2;4),\ B(7;-1;-2),\ C(3;3;1),\ D(-4;2;1), O(0;0;0).$
4. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(2;1;4),\ B(-1;5;-2),\ C(-7;-3;2),\ D(-6;-3;6), O(0;0;0).$
5. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(-1;-5;2),\ B(-6;0;-3),\ C(3;6;-3),\ D(-10;6;7), O(0;0;0).$
6. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(0;-1;-1),\ B(-2;3;5),\ C(1;-5;-9),\ D(-1;-6;3), O(0;0;0).$
7. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(5;2;0),\ B(2;5;0),\ C(1;2;4),\ D(-1;1;1), O(0;0;0).$
8. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(2;-1;-2),\ B(1;2;1),\ C(5;0;-6),\ D(-10;9;-7), O(0;0;0).$
9. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(-2;0;-4),\ B(-1;7;1),\ C(4;-8;-4),\ D(1;-4;6), O(0;0;0).$
10. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(14;4;5),\ B(-5;-3;2),\ C(-2;-6;-3),\ D(-2;2;-1), O(0;0;0).$
11. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6),\ D(8;4;-9), O(0;0;0).$
12. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(2;-1;2),\ B(1;2;-1),\ C(3;2;1),\ D(-4;2;5), O(0;0;0).$
13. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(1;1;2),\ B(-1;1;3),\ C(-2;-2;4),\ D(-1;0;-2), O(0;0;0).$
14. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(2;3;1),\ B(4;1;-2),\ C(6;3;7),\ D(7;5;-3), O(0;0;0).$
15. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(1;1;-1),\ B(2;3;1),\ C(3;2;1),\ D(5;9;-8), O(0;0;0).$
16. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(1;5;-7),\ B(-3;6;3),\ C(-2;7;3),\ D(-8;4;-12), O(0;0;0).$
17. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(-3;4;-7),\ B(1;5;-4),\ C(-5;-2;0),\ D(2;5;4), O(0;0;0).$
18. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(-1;2;-3),\ B(4;-1;0),\ C(2;1;-2),\ D(3;4;5), O(0;0;0).$
19. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(4;-1;3),\ B(-2;1;0),\ C(0;-5;1),\ D(3;2;-6), O(0;0;0).$
20. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(1;-1;1),\ B(-2;0;3),\ C(2;1;-1),\ D(2;-2;-4), O(0;0;0).$
21. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(1;2;0),\ B(1;-1;2),\ C(0;1;-1),\ D(-3;0;1), O(0;0;0).$
22. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(1;0;2),\ B(1;2;-1),\ C(2;-2;1),\ D(2;1;0), O(0;0;0).$
23. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(1;2;-3),\ B(1;0;1),\ C(-2;-1;6),\ D(0;-6;-4), O(0;0;0).$
24. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(-1;2;4),\ B(-1;-2;-4),\ C(3;0;-1),\ D(7;-3;1), O(0;0;0).$
25. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(3;10;-1),\ B(-2;3;-5),\ C(-6;0;-3),\ D(1;-1;2), O(0;0;0).$
26. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(0;-3;1),\ B(-4;1;2),\ C(2;-1;5),\ D(3;1;-4), O(0;0;0).$
27. $\vec{a} = \overrightarrow{OC},\ A(1;3;0),\ B(4;-1;2),\ C(3;0;1),\ D(-4;3;5), O(0;0;0).$
28. $\vec{a} = \overrightarrow{OD},\ A(-2;-1;-1),\ B(0;3;2),\ C(3;1;-4),\ D(-4;7;3), O(0;0;0).$
29. $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ A(-3;-5;6),\ B(2;1;-4),\ C(0;-3;-1),\ D(-5;2;-8), O(0;0;0).$
30. $\vec{a} = \overrightarrow{OB},\ A(2;-4;-3),\ B(5;-6;0),\ C(-1;3;-3),\ D(-10;-8;7), O(0;0;0).$

5. В трех точках A_1, A_2, A_3 помещены грузы m_1, m_2, m_3. Определите центр тяжести этой системы, если

1. $A_1(2;3),\ A_2(5;5),\ A_3(1;1),\ m_1 = 20,\ m_2 = 10,\ m_3 = 40.$
2. $A_1(-2;3),\ A_2(1;5),\ A_3(-3;1),\ m_1 = 25,\ m_2 = 20,\ m_3 = 30.$
3. $A_1(-2;1),\ A_2(1;3),\ A_3(-3;-1),\ m_1 = 15,\ m_2 = 12,\ m_3 = 35.$
4. $A_1(0;1),\ A_2(3;3),\ A_3(-1;-1),\ m_1 = 35,\ m_2 = 25,\ m_3 = 50.$
5. $A_1(0;-1),\ A_2(3;1),\ A_3(-1;-3),\ m_1 = 30,\ m_2 = 20,\ m_3 = 45.$
6. $A_1(3;-4),\ A_2(6;-2),\ A_3(2;-6),\ m_1 = 10,\ m_2 = 25,\ m_3 = 40.$
7. $A_1(-3;4),\ A_2(0;6),\ A_3(-4;2),\ m_1 = 20,\ m_2 = 35,\ m_3 = 15.$
8. $A_1(-3;5),\ A_2(0;-3),\ A_3(-4;-7),\ m_1 = 25,\ m_2 = 35,\ m_3 = 10.$
9. $A_1(3;-5),\ A_2(6;-3),\ A_3(2;-7),\ m_1 = 15,\ m_2 = 45,\ m_3 = 30.$
10. $A_1(-3;-7),\ A_2(0;-5),\ A_3(-4;-9),\ m_1 = 2,\ m_2 = 5,\ m_3 = 8.$
11. $A_1(-1;-5),\ A_2(2;-3),\ A_3(-2;-6),\ m_1 = 6,\ m_2 = 3,\ m_3 = 5.$
12. $A_1(1;-4),\ A_2(2;-2),\ A_3(-2;-6),\ m_1 = 60,\ m_2 = 20,\ m_3 = 20.$
13. $A_1(1;0),\ A_2(2;2),\ A_3(-2;-2),\ m_1 = 30,\ m_2 = 40,\ m_3 = 10.$
14. $A_1(-1;-4),\ A_2(3;-2),\ A_3(-2;-6),\ m_1 = 4,\ m_2 = 5,\ m_3 = 3.$
15. $A_1(3;-4),\ A_2(7;-1),\ A_3(4;-6),\ m_1 = 20,\ m_2 = 40,\ m_3 = 10.$
16. $A_1(1;4),\ A_2(5;7),\ A_3(3;-6),\ m_1 = 60,\ m_2 = 10,\ m_3 = 25.$
17. $A_1(-2;-4),\ A_2(4;2),\ A_3(-1;-6),\ m_1 = 50,\ m_2 = 35,\ m_3 = 25.$
18. $A_1(-3;-4),\ A_2(0;-2),\ A_3(-2;-6),\ m_1 = 6,\ m_2 = 4,\ m_3 = 2.$
19. $A_1(-2;-4),\ A_2(2;-2),\ A_3(-1;-6),\ m_1 = 5,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4.$
20. $A_1(-5;4),\ A_2(0;-2),\ A_3(1;6),\ m_1 = 65,\ m_2 = 25,\ m_3 = 15.$
21. $A_1(5;-4),\ A_2(0;2),\ A_3(6;6),\ m_1 = 25,\ m_2 = 45,\ m_3 = 15.$
22. $A_1(-3;4),\ A_2(1;-2),\ A_3(3;6),\ m_1 = 55,\ m_2 = 35,\ m_3 = 40.$
23. $A_1(-5;-4),\ A_2(-1;-7),\ A_3(2;-5),\ m_1 = 5,\ m_2 = 50,\ m_3 = 20.$
24. $A_1(-6;4),\ A_2(0;-2),\ A_3(3;7),\ m_1 = 60,\ m_2 = 25,\ m_3 = 40.$
25. $A_1(-3;3),\ A_2(1;-3),\ A_3(5;6),\ m_1 = 15,\ m_2 = 50,\ m_3 = 45.$
26. $A_1(-5;2),\ A_2(0;-3),\ A_3(2;6),\ m_1 = 55,\ m_2 = 20,\ m_3 = 10.$
27. $A_1(-6;5),\ A_2(-2;-2),\ A_3(1;3),\ m_1 = 60,\ m_2 = 20,\ m_3 = 25.$
28. $A_1(-4;4),\ A_2(1;-2),\ A_3(4;2),\ m_1 = 5,\ m_2 = 5,\ m_3 = 4.$
29. $A_1(-5;-4),\ A_2(0;2),\ A_3(2;-6),\ m_1 = 55,\ m_2 = 5,\ m_3 = 40.$
30. $A_1(-6;2),\ A_2(-3;-2),\ A_3(1;5),\ m_1 = 6,\ m_2 = 5,\ m_3 = 4.$

6. Найдите длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AM}$, если точка M делит отрезок AB в отношении λ, где

1. $A(0;1),\ B(1;3),\ \lambda = -2.$
2. $A(-1;-1),\ B(1;3),\ \lambda = -3.$
3. $A(2;5),\ B(-2;-3),\ \lambda = 3.$
4. $A(0;1),\ B(1;-2),\ \lambda = -3.$
5. $A(-1;-5),\ B(2;-3),\ \lambda = -3/2.$
6. $A(1;-1),\ B(3;-5),\ \lambda = -3/4.$
7. $A(0;2),\ B(1;3),\ \lambda = -3/5.$
8. $A(-1;1),\ B(2;4),\ \lambda = -2/3.$
9. $A(-2;0),\ B(-3;-5),\ \lambda = -2.$
10. $A(0;3),\ B(1;2),\ \lambda = 9.$
11. $A(2;1),\ B(-1;4),\ \lambda = 4.$
12. $A(-2;5),\ B(-3;6),\ \lambda = -3.$

13. $A(0;-4),\ B(1;1),\ \lambda=4/5.$
14. $A(2;6),\ B(1;1),\ \lambda=-2/13.$
15. $A(-2;-6),\ B(1;1),\ \lambda=-2/9.$
16. $A(0;3),\ B(1;4),\ \lambda=-2/7.$
17. $A(-1;2),\ B(2;-4),\ \lambda=-3.$
18. $A(-2;1),\ B(3;6),\ \lambda=-6.$
19. $A(0;-3),\ B(2;3),\ \lambda=-2.$
20. $A(-1;-4),\ B(1;-8),\ \lambda=5.$
21. $A(-2;-5),\ B(4;1),\ \lambda=2/7.$
22. $A(0;1),\ B(2;4),\ \lambda=3/2.$
23. $A(-2;-2),\ B(2;4),\ \lambda=-3/5.$
24. $A(-4;-5),\ B(-2;-3),\ \lambda=-3/10.$
25. $A(0;2),\ B(2;-4),\ \lambda=7.$
26. $A(-1;5),\ B(1;0),\ \lambda=-6.$
27. $A(-2;8),\ B(3;-7),\ \lambda=-11.$
28. $A(0;-2),\ B(2;-5),\ \lambda=-3.$
29. $A(-1;-5),\ B(1;-1),\ \lambda=-3/4.$
30. $A(-2;-8),\ B(3;7),\ \lambda=5/3.$

7. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где

1. $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-2\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=4,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/6.$
2. $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}+4\vec{n};\ |\vec{m}|=4,\ |\vec{n}|=8,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=3\pi/4.$
3. $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n},\ \vec{b}=2\vec{m}-4\vec{n};\ |\vec{m}|=4,\ |\vec{n}|=1,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/4.$
4. $\vec{a}=2\vec{m}-3\vec{n},\ \vec{b}=5\vec{m}+\vec{n};\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=3\ \ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$
5. $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=5,\ |\vec{n}|=1,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$
6. $\vec{a}=2\vec{m}+10\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-4\vec{n};\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=5,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=5\pi/6.$
7. $\vec{a}=2\vec{m}-4\vec{n},\ \vec{b}=4\vec{m}+2\vec{n};\ |\vec{m}|=4,\ |\vec{n}|=7,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=3\pi/4.$
8. $\vec{a}=3\vec{m}+9\vec{n},\ \vec{b}=-\vec{m}+4\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=6,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$
9. $\vec{a}=4\vec{m}-2\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}+3\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=2,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$
10. $\vec{a}=8\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-\vec{n};\ |\vec{m}|=4,\ |\vec{n}|=9,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/4.$
11. $\vec{a}=2\vec{m}-8\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}+2\vec{n};\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=5,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/6.$
12. $\vec{a}=2\vec{m}+8\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=5,\ |\vec{n}|=9,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$
13. $\vec{a}=9\vec{m}+6\vec{n},\ \vec{b}=3\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=13,\ |\vec{n}|=3,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$
4. $\vec{a}=8\vec{m}-2\vec{n},\ \vec{b}=2\vec{m}+4\vec{n};\ |\vec{m}|=7,\ |\vec{n}|=9,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/4.$
15. $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-12\vec{n};\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=8,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$
16. $\vec{a}=9\vec{m}-3\vec{n},\ \vec{b}=3\vec{m}+6\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=4,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/6.$
17. $\vec{a}=4\vec{m}-6\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}+2\vec{n};\ |\vec{m}|=5,\ |\vec{n}|=9,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$
18. $\vec{a}=10\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=2,\ |\vec{n}|=6,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$
19. $\vec{a}=-7\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=3\vec{m}+9\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=4,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/6.$
20. $\vec{a}=12\vec{m}-2\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}+6\vec{n};\ |\vec{m}|=8,\ |\vec{n}|=3,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$
21. $\vec{a}=10\vec{m}+\vec{n},\ \vec{b}=-3\vec{m}+2\vec{n};\ |\vec{m}|=6,\ |\vec{n}|=5,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/4.$

22. $\vec{a}=3\vec{m}+4\vec{n},\ \vec{b}=3\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=8,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$

23. $\vec{a}=14\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-3\vec{n};\ |\vec{m}|=6,\ |\vec{n}|=9,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=3\pi/4.$

24. $\vec{a}=2\vec{m}+6\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-2\vec{n};\ |\vec{m}|=7,\ |\vec{n}|=4,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=2\pi/3.$

25. $\vec{a}=9\vec{m}+3\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-6\vec{n};\ |\vec{m}|=5,\ |\vec{n}|=3,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/4.$

26. $\vec{a}=-10\vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b}=-2\vec{m}-2\vec{n};\ |\vec{m}|=3,\ |\vec{n}|=8,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=5\pi/6.$

27. $\vec{a}=-6\vec{m}-8\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}+3\vec{n};\ |\vec{m}|=8,\ |\vec{n}|=7,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=3\pi/4.$

28. $\vec{a}=-6\vec{m}+\vec{n},\ \vec{b}=-5\vec{m}-\vec{n};\ |\vec{m}|=4,\ |\vec{n}|=6,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=5\pi/6.$

29. $\vec{a}=-2\vec{m}-3\vec{n},\ \vec{b}=6\vec{m}-12\vec{n};\ |\vec{m}|=1,\ |\vec{n}|=6,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/3.$

30. $\vec{a}=-4\vec{m}+6\vec{n},\ \vec{b}=10\vec{m}+2\vec{n};\ |\vec{m}|=5,\ |\vec{n}|=7,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}})=\pi/2.$

8. Найдите скалярную и векторную проекцию вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$, где

1. $\vec{a}=2\ \overrightarrow{AB}+3\ \overrightarrow{DC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(1;3;6),\ B(2;2;1),\ C(-1;0;1),$ $D(-4;6;-3),\ O(0;0;0).$

2. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\ \overrightarrow{AC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{DB}$ и $A(-4;2;6),\ B(2;-3;0),\ C(-10;5;8),$ $D(-5;2;-4),\ O(0;0;0).$

3. $\vec{a}=2\ \overrightarrow{AB}-3\ \overrightarrow{DC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(7;2;4),\ B(7;-1;-2),\ C(3;3;1),$ $D(-4;2;1),\ O(0;0;0).$

4. $\vec{a}=-\ \overrightarrow{AB}+3\ \overrightarrow{DB},\ \vec{b}=\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{CA}$ и $A(2;1;4),\ B(-1;5;-2),\ C(-7;-3;2),$ $D(-6;-3;6),\ O(0;0;0).$

5. $\vec{a}=3\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA},\ \vec{b}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(-1;-5;2),\ B(-6;0;-3),\ C(3;6;-3),$ $D(-10;6;7),\ O(0;0;0).$

6. $\vec{a}=-2\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{CA}$ и $A(0;-1;-1),\ B(-2;3;5),\ C(1;-5;-9),$ $D(-1;-6;3),\ O(0;0;0).$

7. $\vec{a}=2\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(5;2;0),\ B(2;5;0),\ C(1;2;4),$ $D(-1;1;1),\ O(0;0;0).$

8. $\vec{a}=\overrightarrow{BD}+3\ \overrightarrow{CB},\ \vec{b}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{CD}$ и $A(2;-1;-2),\ B(1;2;1),\ C(5;0;-6),$ $D(-10;9;-7),\ O(0;0;0).$

9. $\vec{a}=2\ \overrightarrow{CB}-3\ \overrightarrow{AD},\ \vec{b}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(-2;0;-4),\ B(-1;7;1),\ C(4;-8;-4),$ $D(1;-4;6),\ O(0;0;0).$

10. $\vec{a}=-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{CA}$ и $A(14;4;5),\ B(-5;-3;2),\ C(-2;-6;-3),$ $D(-2;2;-1),\ O(0;0;0).$

11. $\vec{a}=3\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \vec{b}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{DB}$ и $A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6),$ $D(8;4;-9),\ O(0;0;0).$

12. $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+2\ \overrightarrow{CB},\ \vec{b}=\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{CB}$ и $A(2;-1;2),\ B(1;2;-1),\ C(3;2;1),$ $D(-4;2;5),\ O(0;0;0).$

13. $\vec{a} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{CD}$ и $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(-2;-2;4)$, $D(-1;0;-2)$, $O(0;0;0)$.

14. $\vec{a} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{CD}$ и $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(7;5;-3)$, $O(0;0;0)$.

15. $\vec{a} = \overrightarrow{DB} - 3\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{DB}$ и $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(5;9;-8)$, $O(0;0;0)$.

16. $\vec{a} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{CD}$ и $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-2;7;3)$, $D(-8;4;-12)$, $O(0;0;0)$.

17. $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{DB}$ и $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$, $O(0;0;0)$.

18. $\vec{a} = -\overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{DB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{CA}$ и $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(3;4;5)$, $O(0;0;0)$.

19. $\vec{a} = -\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{CB}$ и $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$, $O(0;0;0)$.

20. $\vec{a} = \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{CD}$ и $A(1;-1;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(2;1;-1)$, $D(2;-2;-4)$, $O(0;0;0)$.

21. $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{DC}$ и $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(-3;0;1)$, $O(0;0;0)$.

22. $\vec{a} = -\overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{DA}$ и $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$, $D(2;1;0)$, $O(0;0;0)$.

23. $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{AB}$ и $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(0;-6;-4)$, $O(0;0;0)$.

24. $\vec{a} = -2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{CD}$ и $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$, $D(7;-3;1)$, $O(0;0;0)$.

25. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{DC}$ и $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$, $O(0;0;0)$.

26. $\vec{a} = -2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{CA}$ и $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$, $D(3;1;-4)$, $O(0;0;0)$.

27. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{DC}$ и $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-4;3;5)$, $O(0;0;0)$.

28. $\vec{a} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{CB}$ и $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$, $O(0;0;0)$.

29. $\vec{a} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{DC}$ и $A(-3;-5;6)$, $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;-1)$, $D(-5;2;-8)$, $O(0;0;0)$.

30. $\vec{a} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{BC}$ и $A(2;-4;-3)$, $B(5;-6;0)$, $C(-1;3;-3)$, $D(-10;-8;7)$, $O(0;0;0)$.

9. Найдите площадь треугольника ABC и длину высоты, опущенной из вершины

1. A, где $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$.
2. B, где $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$.
3. C, где $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$.
4. B, где $A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$.
5. C, где $A(-6;0;-3)$, $B(3;6;-3)$, $C(-10;6;7)$.
6. A, где $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$.
7. C, где $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$.
8. A, где $A(2;-1;-2)$, $B(5;0;-6)$, $C(-10;9;-7)$.
9. B, где $A(-1;7;1)$, $B(4;-8;-4)$, $C(1;-4;6)$.
10. C, где $A(-5;-3;2)$, $B(-2;-6;-3)$, $C(-2;2;-1)$.
11. A, $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$.
12. B, где $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-4;2;5)$.
13. C, где $A(1;1;2)$, $B(-2;-2;4)$, $C(-1;0;-2)$.
14. A, где $A(4;1;-2)$, $B(6;3;7)$, $C(7;5;-3)$.
15. B, где $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$.
16. C, где $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-8;4;-12)$.
17. A, где $A(-3;4;-7)$, $B(-5;-2;0)$, $C(2;5;4)$.
18. B, где $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(3;4;5)$.
19. C, где $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(3;2;-6)$.
20. A, где $A(1;-1;1)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;-2;-4)$.
21. B, где $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$.
22. C, где $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$.
23. A, где $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$.
24. B, где $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$.
25. C, где $A(-2;3;-5)$, $B(-6;0;-3)$, $C(1;-1;2)$.
26. A, где $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$.
27. B, где $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$.
28. C, где $A(-2;-1;-1)$, $B(3;1;-4)$, $C(-4;7;3)$.
29. A, где $A(2;1;-4)$, $B(0;-3;-1)$, $C(-5;2;-8)$.
30. B, где $A(5;-6;0)$, $B(-1;3;-3)$, $C(-10;-8;7)$.

10. Найдите объем пирамиды γ и длину высоты, опущенной на грань

1. (ABC) пирамиды $\gamma=(ABCD)$, если $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$.
2. (ABD) пирамиды $\gamma=(ABCD)$, если $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-5;2;-4)$.
3. (ADC) пирамиды $\gamma=(ABCD)$, если $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-4;2;1)$.
4. (DBC) пирамиды $\gamma=(ABCD)$, если $A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$, $D(-6;-3;6)$.
5. (OBC) пирамиды $\gamma=(OBCD)$, если $B(-6;0;-3)$, $C(3;6;-3)$, $D(-10;6;7)$, $O(0;0;0)$.
6. (OAB) пирамиды $\gamma=(OABC)$, если $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $O(0;0;0)$.
7. (OAC) пирамиды $\gamma=(OABC)$, если $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $O(0;0;0)$.

8. (OAD) пирамиды $\gamma = (OACD)$, если $A(2;-1;-2),\ C(5;0;-6),\ D(-10;9;-7),\ O(0;0;0)$.
9. (ODB) пирамиды $\gamma = (ODBC)$, если $B(-1;7;1),\ C(4;-8;-4),\ D(1;-4;6),\ O(0;0;0)$.
10. (ODC) пирамиды $\gamma = (ODCB)$, если $B(-5;-3;2), C(-2;-6;-3), D(-2;2;-1), (0;0;0)$.
11. (ABC) пирамиды $\gamma = (ABCO)$, если $A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6),\ O(0;0;0)$.
12. (ABD) пирамиды $\gamma = (ABDO)$, если $A(2;-1;2),\ B(1;2;-1),\ D(-4;2;5),\ O(0;0;0)$.
13. (ADC) пирамиды $\gamma = (ADCO)$, если $A(1;1;2),\ C(-2;-2;4),\ D(-1;0;-2),\ O(0;0;0)$.
14. (DBC) пирамиды $\gamma = (DBCO)$, если $B(4;1;-2),\ C(6;3;7),\ D(7;5;-3),\ O(0;0;0)$.
15. (OBC) пирамиды $\gamma = (OBCA)$, если $A(1;1;-1),\ B(2;3;1),\ C(3;2;1),\ O(0;0;0)$.
16. (OAB) пирамиды $\gamma = (OABD)$, если $A(1;5;-7),\ B(-3;6;3),\ D(-8;4;-12),\ O(0;0;0)$.
17. (OAC) пирамиды $\gamma = (OACD)$, если $A(-3;4;-7),\ C(-5;-2;0),\ D(2;5;4),\ O(0;0;0)$.
18. (OAD) пирамиды $\gamma = (OADB)$, если $A(-1;2;-3),\ B(4;-1;0),\ D(3;4;5),\ O(0;0;0)$.
19. (OBD) пирамиды $\gamma = (OBDA)$, если $A(4;-1;3),\ B(-2;1;0),\ D(3;2;-6),\ O(0;0;0)$.
20. (ODC) пирамиды $\gamma = (ODCA)$, если $A(1;-1;1),\ C(2;1;-1),\ D(2;-2;-4),\ O(0;0;0)$.
21. (ABC) пирамиды $\gamma = (ABCD)$, если $A(1;2;0),\ B(1;-1;2),\ C(0;1;-1),\ D(-3;0;1)$.
22. (ABD) пирамиды $\gamma = (ABCD)$, если $A(1;0;2),\ B(1;2;-1),\ C(2;-2;1),\ D(2;1;0)$.
23. (ADC) пирамиды $\gamma = (ADCB)$, если $A(1;2;-3),\ B(1;0;1),\ C(-2;-1;6),\ D(0;-6;-4)$.
24. (BCD) пирамиды $\gamma = (ABCD)$, если $A(-1;2;4),\ B(-1;-2;-4),\ C(3;0;-1),\ D(7;-3;1)$.
25. (OBC) пирамиды $\gamma = (OBCD)$, если $B(-2;3;-5),\ C(-6;0;-3),\ D(1;-1;2),\ O(0;0;0)$.
26. (OAB) пирамиды $\gamma = (OABC)$, если $A(0;-3;1),\ B(-4;1;2),\ C(2;-1;5),\ O(0;0;0)$.
27. (OAC) пирамиды $\gamma = (OACB)$, если $A(1;3;0),\ B(4;-1;2),\ C(3;0;1),\ O(0;0;0)$.
28. (OAD) пирамиды $\gamma = (OADC)$, если $A(-2;-1;-1),\ C(3;1;-4),\ D(-4;7;3),\ O(0;0;0)$.
29. (OBD) пирамиды $\gamma = (OBDC)$, если $B(2;1;-4),\ C(0;-3;-1),\ D(-5;2;-8),\ O(0;0;0)$.
30. (ODC) пирамиды $\gamma = (ODCB)$, если $B(5;-6;0),\ C(-1;3;-3),\ D(-10;-8;7),\ O(0;0;0)$.

11. Найдите координаты центра описанной около треугольника

1. ABC окружности, где $A(0;1),\ B(1;3),\ C(-5;4)$.
2 OAB окружности, где $O(0;0),\ A(-1;-1),\ B(1;3)$.
3. OCB окружности, где $O(0;0),\ B(-2;-3),\ C(2;1)$.
4. OAC окружности, где $O(0;0),\ A(0;1),\ C(2;4)$.
5. ABC окружности, где $A(-1;-5),\ B(2;-3),\ C(-5;1)$.
6. OAB окружности, где $O(0;0),\ A(1;-1),\ B(3;-5)$.
7. OCB окружности, где $O(0;0),\ B(1;3),\ C(-5;3)$.
8. OAC окружности, где $O(0;0),\ A(-1;1),\ C(5;-1)$.
9. ABC окружности, где $A(-2;0),\ B(-3;-1),\ C(2;-3)$.
10. OAB окружности, где $O(0;0),\ A(0;3),\ B(1;2)$.
11. OCB окружности, где $O(0;0),\ B(-1;4),\ C(5;3)$.
12. OAC окружности, где $O(0;0),\ A(-2;5),\ C(-1;-4)$.
13. ABC окружности, где $A(0;-4),\ B(1;1),\ C(-3;4)$.
14. OAB окружности, где $O(0;0),\ A(2;6),\ B(1;1)$.
15. OCB окружности, где $O(0;0),\ B(1;4),\ C(5;-4)$.
16. OAC окружности, где $O(0;0),\ A(0;3),\ C(5;-4)$.

17. ABC окружности, где $A(-1;2)$, $B(2;5)$, $C(4;-1)$.
18. OAB окружности, где $O(0;0)$, $A(-2;1)$, $B(3;6)$.
19. OCB окружности, где $O(0;0)$, $B(2;-1)$, $C(5;5)$.
20. OAC окружности, где $O(0;0)$, $A(-1;-4)$, $C(3;3)$.
21. ABC окружности, где $A(-2;-5)$, $B(4;1)$, $C(6;-1)$.
22. OAB окружности, где $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(2;4)$.
23. OCB окружности, где $O(0;0)$, $B(2;4)$, $C(3;-1)$.
24. OAC окружности, где $O(0;0)$, $A(-4;-5)$, $C(2;-4)$.
25. ABC окружности, где $A(0;2)$, $B(2;-4)$, $C(5;4)$.
26. OAB окружности, где $O(0;0)$, $A(-1;5)$, $B(1;-1)$.
27. OCB окружности, где $O(0;0)$, $B(3;-7)$, $C(6;3)$.
28. OAC окружности, где $O(0;0)$, $A(0;-2)$, $C(5;-4)$.
29. ABC окружности, где $A(-1;-5)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$.
30. OAB окружности, где $O(0;0)$, $A(-2;-8)$, $B(3;7)$.

12. Даны две вершины A_1 и A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и точка N пересечения его медиан. Составьте уравнения сторон этого треугольника и определите координаты третьей вершины A_3, если

1. $A_1(1;-1)$, $A_2(2;4)$, $N(1;4/3)$.
2. $A_1(2;-3)$, $A_2(-5;1)$, $N(-4/3;-7/3)$.
3. $A_1(3;7)$, $A_2(7;-1)$, $N(8/3;-2/3)$.
4. $A_1(1;1)$, $A_2(6;-2)$, $N(2;-2)$.
5. $A_1(2;4)$, $A_2(5;-4)$, $N(7/3;-2/3)$.
6. $A_1(4;1)$, $A_2(1;-1)$, $N(4/3;5/3)$.
7. $A_1(5;4)$, $A_2(0;2)$, $N(7/3;2/3)$.
8. $A_1(-2;-2)$, $A_2(-4;-5)$, $N(-4/3;-11/3)$.
9. $A_1(3;-1)$, $A_2(-2;-2)$, $N(1;1/3)$.
10. $A_1(4;-4)$, $A_2(2;4)$, $N(2;1/3)$.
11. $A_1(4;1)$, $A_2(6;-1)$, $N(8/3;-5/3)$.
12. $A_1(3;3)$, $A_2(-1;-4)$, $N(1;-1)$.
13. $A_1(5;5)$, $A_2(0;-3)$, $N(7/3;1/3)$.
14. $A_1(-2;1)$, $A_2(3;6)$, $N(5/3;5/3)$.
15. $A_1(2;5)$, $A_2(4;-1)$, $N(5/3;2)$.
16. $A_1(1;4)$, $A_2(5;-4)$, $N(2;1)$.
17. $A_1(-2;-6)$, $A_2(8;-1)$, $N(7/3;2/3)$.
18. $A_1(1;1)$, $A_2(4;-1)$, $N(7/3;2)$.
19. $A_1(0;-4)$, $A_2(-3;4)$, $N(-2/3;1/3)$.
20. $A_1(-1;-4)$, $A_2(-3;-6)$, $N(-2;7/3)$.
21. $A_1(1;1)$, $A_2(8;7)$, $N(6;2)$.
22. $A_1(1;-1)$, $A_2(-1;-2)$, $N(1;8/3)$.
23. $A_1(-5;3)$, $A_2(0;2)$, $N(-4/3;8/3)$.
24. $A_1(5;-1)$, $A_2(2;4)$, $N(2;4/3)$.
25. $A_1(-2;0)$, $A_2(2;-3)$, $N(-1;-4/3)$.
26. $A_1(1;2)$, $A_2(-4;4)$, $N(-1;3)$.
27. $A_1(5;3)$, $A_2(-1;4)$, $N(2;8/3)$.
28. $A_1(0;1)$, $A_2(-5;4)$, $N(-4/3;8/3)$.
29. $A_1(5;-1)$, $A_2(1;3)$, $N(5/3;1/3)$.
30. $A_1(2;1)$, $A_2(-2;-3)$, $N(2/3;1)$.

13. Даны две вершины A_1 и A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ и точка N пересечения его высот. Составьте уравнения сторон этого треугольника и найдите координаты третьей вершины A_3, если

1. $A_1(3;1)$, $A_2(-4;-5)$, $N(-2;-1)$.
2. $A_1(-3;1)$, $A_2(4;-5)$, $N(2;-1)$.
3. $A_1(-2;-4)$, $A_2(5;2)$, $N(3;-2)$.
4. $A_1(-2;4)$, $A_2(5;-2)$, $N(3;2)$.
5. $A_1(2;-4)$, $A_2(-5;2)$, $N(-3;-2)$.
6. $A_1(2;4)$, $A_2(-5;-2)$, $N(-3;-2)$.
7. $A_1(-4;-5)$, $A_2(3;1)$, $N(2;-3)$.
8. $A_1(-4;5)$, $A_2(3;-1)$, $N(2;3)$.

9. $A_1(4;-5)$, $A_2(-3;1)$, $N(-2;-3)$.
10. $A_1(4;5)$, $A_2(-3;-1)$, $N(-2;3)$.
11. $A_1(1;-3)$, $A_2(8;3)$, $N(4;3)$.
12. $A_1(1;3)$, $A_2(8;-3)$, $N(4;-3)$.
13. $A_1(-1;3)$, $A_2(-8;3)$, $N(-4;-3)$.
14. $A_1(-1;3)$, $A_2(-8;-3)$, $N(-4;-3)$.
15. $A_1(2;1)$, $A_2(9;7)$, $N(7;4)$.
16. $A_1(2;-1)$, $A_2(9;-7)$, $N(7;-4)$.
17. $A_1(-2;1)$, $A_2(-9;7)$, $N(-7;4)$.
18. $A_1(-2;-1)$, $A_2(-9;-7)$, $N(-7;-4)$.
19. $A_1(3;2)$, $A_2(10;8)$, $N(9;4)$.
20. $A_1(-3;-2)$, $A_2(-10;-8)$, $N(-9;-4)$.
21. $A_1(1;-2)$, $A_2(8;4)$, $N(8;3)$.
22. $A_1(1;2)$, $A_2(8;-4)$, $N(8;-3)$.
23. $A_1(-1;-2)$, $A_2(-8;4)$, $N(-8;3)$.
24. $A_1(-1;2)$, $A_2(-8;-4)$, $N(-8;-3)$.
25. $A_1(-3;4)$, $A_2(4;10)$, $N(3;8)$.
26. $A_1(-3;-4)$, $A_2(4;-10)$, $N(3;-8)$.
27. $A_1(3;4)$, $A_2(-4;10)$, $N(-3;8)$.
28. $A_1(3;-4)$, $A_2(-4;-10)$, $N(-3;-8)$.
29. $A_1(-3;-1)$, $A_2(4;5)$, $N(2;1)$.
30. $A_1(3;-1)$, $A_2(-4;5)$, $N(-2;1)$.

14. Приведите уравнение кривой к каноническому виду, постройте старые, новые оси координат и заданную кривую, найдите, если возможно, центр, полуоси, фокусы, директрисы, асимптоты и эксцентриситет кривой:

1. $2y^2-4y+6x-17=0$.
2. $3y^2+6y+6x-29=0$.
3. $2x^2+8y+8x-4=0$.
4. $3x^2+6y-6x+13=0$.
5. $4x^2-6y-8x-17=0$.
6. $3x^2+y+6x+4=0$.
7. $2y^2-4y+x+4=0$.
8. $-2y^2+8y=2x$.
9. $3y^2-6y+2x+4=0$.
10. $8y^2+4y-4x+1=0$.
11. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.
12. $9x^2-16y^2+90x-32y-367=0$.
13. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.
14. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.
15. $9x^2-25y^2-18x-100y-316=0$.
16. $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$.
17. $x^2-4y^2+6x+5=0$.
18. $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$.
19. $4x^2-9y^2+24x+18y-9=0$.
20. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.
21. $2x^2+5y^2+12x-10y+13=0$.
22. $2x^2+3y^2+4x-6y-7=0$.
23. $4x^2+9y^2+24x-18y+9=0$.
24. $x^2+9y^2-4x+18y+9=0$.
25. $5x^2+9y^2+30x-18y+9=0$.
26. $16x^2+25y^2-32x+100y-284=0$.
27. $4x^2+3y^2+8x-12y-32=0$.
28. $x^2+2y^2+4x-4y=0$.
29. $3x^2+4y^2-12x+8y-32=0$.
30. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$.

15. Составьте уравнение плоскости, параллельной

1. оси Ox и проходящей через точки $A(2;0;3)$, $B(5;-1;4)$.
2. оси Ox и проходящей через точки $A(5;2;4)$, $B(1;0;6)$.
3. оси Ox и проходящей через точки $A(1;7;8)$, $B(-4;8;1)$.
4. оси Ox и проходящей через точки $A(0;-1;-5)$, $B(-1;-5;-9)$.
5. оси Ox и проходящей через точки $A(7;1;1)$, $B(-5;2;-3)$.
6. оси Oy и проходящей через точки $A(7;1;10)$, $B(5;4;-3)$.
7. оси Oy и проходящей через точки $A(-2;5;-2)$, $B(1;0;2)$.
8. оси Oy и проходящей через точки $A(0;-4;7)$, $B(2;2;5)$.
9. оси Oy и проходящей через точки $A(-3;-4;5)$, $B(6;-5;3)$.

10. оси Oy и проходящей через точки $A(7;8;3)$, $B(1;1;-2)$.
11. оси Oz и проходящей через точки $A(9;8;5)$, $B(-7;4;3)$.
12. оси Oz и проходящей через точки $A(5;-6;5)$, $B(4;7;9)$.
13. оси Oz и проходящей через точки $A(4;4;6)$, $B(2;-6;4)$.
14. оси Oz и проходящей через точки $A(0;4;-5)$, $B(7;6;-5)$.
15. оси Oz и проходящей через точки $A(1;5;-3)$, $B(9;-3;4)$.
16. оси Ox, вектору $\vec{a} = \{-3;4;8\}$ и проходящей через точку $B(6;4;-3)$.
17. оси Ox, вектору $\vec{a} = \{4;-1;7\}$ и проходящей через точку $B(2;-1;5)$.
18. оси Ox, вектору $\vec{a} = \{3;2;6\}$ и проходящей через точку $B(-1;0;6)$.
19. оси Ox, вектору $\vec{a} = \{1;3;-5\}$ и проходящей через точку $B(4;5;-2)$.
20. оси Ox, вектору $\vec{a} = \{2;2;-9\}$ и проходящей через точку $B(2;-3;-4)$.
21. оси Oy, вектору $\vec{a} = \{2;-3;5\}$ и проходящей через точку $B(1;1;3)$.
22. оси Oy, вектору $\vec{a} = \{1;2;-4\}$ и проходящей через точку $B(5;0;-3)$.
23. оси Oy, вектору $\vec{a} = \{5;3;-2\}$ и проходящей через точку $B(2;4;0)$.
24. оси Oy, вектору $\vec{a} = \{-2;-3;6\}$ и проходящей через точку $B(1;-1;4)$.
25. оси Oy, вектору $\vec{a} = \{2;-4;5\}$ и проходящей через точку $B(6;2;-8)$.
26. оси Oz, вектору $\vec{a} = \{2;2;3\}$ и проходящей через точку $B(-2;-3;-6)$.
27. оси Oz, вектору $\vec{a} = \{-1;-4;-5\}$ и проходящей через точку $B(-1;2;7)$.
28. оси Oz, вектору $\vec{a} = \{2;3;7\}$ и проходящей через точку $B(5;4;4)$.
29. оси Oz, вектору $\vec{a} = \{2;-5;2\}$ и проходящей через точку $B(1;0;-1)$.
30. оси Oz, вектору $\vec{a} = \{-1;-5;4\}$ и проходящей через точку $B(0;1;-4)$.

16. Найдите угол между плоскостями α_1 и α_2, где

1. $\alpha_1: \ x + z - 7 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x + y + z - 17 = 0$.
2. $\alpha_1: \ -3y + 4z - 5 = 0$ и $\alpha_2: \ x + y - z - 7 = 0$.
3. $\alpha_1: \ 3x - 4z - 4 = 0$ и $\alpha_2: \ x + 3y - z - 1 = 0$.
4. $\alpha_1: \ -2x + 2y - 8 = 0$ и $\alpha_2: \ 3x - 2y + z = 0$.
5. $\alpha_1: \ -5y - 12z + 9 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x - 8y - 15 = 0$.
6. $\alpha_1: \ 3x + 4z - 48 = 0$ и $\alpha_2: \ 5x + 2y - 3z - 1 = 0$.
7. $\alpha_1: \ x - y + 3 = 0$ и $\alpha_2: \ 4x + 5y - 7z - 7 = 0$.
8. $\alpha_1: \ y - z + 29 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x - y + 3z + 6 = 0$.
9. $\alpha_1: \ 2x - 2z - 15 = 0$ и $\alpha_2: \ x - 2y + 2z - 11 = 0$.
10. $\alpha_1: \ 3x + 4y + 23 = 0$ и $\alpha_2: \ x - y - 4z - 12 = 0$.
11. $\alpha_1: \ 4x - 3z - 5 = 0$ и $\alpha_2: \ x + 2y - 5z - 10 = 0$.
12. $\alpha_1: \ 3y - 4z + 9 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x - y + 2z + 12 = 0$.
13. $\alpha_1: \ 12x - 5y + 3 = 0$ и $\alpha_2: \ x + 2y - 2z - 1 = 0$.
14. $\alpha_1: \ 3x + 4z - 25 = 0$ и $\alpha_2: \ 3x - y + z - 20 = 0$.
15. $\alpha_1: \ 8y - 6z + 7 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x + y - z + 2 = 0$.
16. $\alpha_1: \ 5x + 12y + 13 = 0$ и $\alpha_2: \ x + y - z - 11 = 0$.
17. $\alpha_1: \ 6x + 8z - 5 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x - y - z - 22 = 0$.
18. $\alpha_1: \ 12x - 5z - 3 = 0$ и $\alpha_2: \ x - 2y + z - 2 = 0$.

19. $\alpha_1: \ 2x - 2y - 19 = 0$ и $\alpha_2: \ 3x - 4y + 5z + 1 = 0$.
20. $\alpha_1: \ 5y + 12z - 8 = 0$ и $\alpha_2: \ x + y - z + 5 = 0$.
21. $\alpha_1: \ 3x + 4z - 2 = 0$ и $\alpha_2: \ x + 2y - z - 7 = 0$.
22. $\alpha_1: \ 3x + 3y - 1 = 0$ и $\alpha_2: \ 5x - 3y + 4z + 8 = 0$.
23. $\alpha_1: \ 6y - 8z + 5 = 0$ и $\alpha_2: \ 2x - y - z + 3 = 0$.
24. $\alpha_1: \ 12x + 5z - 4 = 0$ и $\alpha_2: \ x + y - z - 10 = 0$.
25. $\alpha_1: \ 4x - 3y + 6 = 0$ и $\alpha_2: \ x - 5y + z + 2 = 0$.
26. $\alpha_1: \ 5x - 12y - 21 = 0$ и $\alpha_2: \ 4x - 3y + 5z + 5 = 0$.
27. $\alpha_1: \ 3y + 3z + 4 = 0$ и $\alpha_2: \ x + y + z + 13 = 0$.
28. $\alpha_1: \ 6x + 8z - 5 = 0$ и $\alpha_2: \ 3x - y - 2z - 1 = 0$.
29. $\alpha_1: \ x - y - 1 = 0$ и $\alpha_2: \ 5x - 3y - 4z + 2 = 0$.
30. $\alpha_1: \ 12x - 5z - 3 = 0$ и $\alpha_2: \ x - 5y + 3z + 4 = 0$.

17. Найдите расстояние от точки P до плоскости α, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{n}$, где

1. $P(-1;3;1)$, $A(1;0;2)$ и $\vec{n} = \{2;4;-1\}$.
2. $P(3;0;-5)$, $A(1;1;0)$ и $\vec{n} = \{1;-2;2\}$.
3. $P(4;2;8)$, $A(3;5;-4)$ и $\vec{n} = \{2;-1;2\}$.
4. $P(2;-1;7)$, $A(5;-7;2)$ и $\vec{n} = \{3;-4;5\}$.
5. $P(-1;-1;9)$, $A(1;-4;2)$ и $\vec{n} = \{4;3;-5\}$.
6. $P(5;4;0)$, $A(3;8;0)$ и $\vec{n} = \{1;-1;4\}$.
7. $P(3;4;-5)$, $A(2;8;-9)$ и $\vec{n} = \{2;-2;3\}$.
8. $P(8;3;0)$, $A(3;4;7)$ и $\vec{n} = \{-5;-4;3\}$.
9. $P(5;3;6)$, $A(-6;1;7)$ и $\vec{n} = \{2;-2;1\}$.
10. $P(5;7;-1)$, $A(-6;4;5)$ и $\vec{n} = \{1;-2;3\}$.
11. $P(2;9;-1)$, $A(8;3;-5)$ и $\vec{n} = \{4;5;3\}$.
12. $P(10;7;-1)$, $A(5;6;-5)$ и $\vec{n} = \{4;-3;-5\}$.
13. $P(1;-5;-1)$, $A(2;1;-5)$ и $\vec{n} = \{1;-3;-1\}$.
14. $P(0;-5;-4)$, $A(6;7;-5)$ и $\vec{n} = \{2;-3;-2\}$.
15. $P(3;-2;-7)$, $A(0;1;-5)$ и $\vec{n} = \{2;-1;-2\}$.
16. $P(1;-1;-5)$, $A(4;3;-1)$ и $\vec{n} = \{4;-3;-3\}$.
17. $P(3;9;-2)$, $A(1;0;-1)$ и $\vec{n} = \{5;-4;-3\}$.
18. $P(-6;1;-8)$, $A(8;1;-1)$ и $\vec{n} = \{3;-4;5\}$.
19. $P(-7;9;-1)$, $A(5;4;0)$ и $\vec{n} = \{4;-3;5\}$.
20. $P(-3;9;-4)$, $A(8;5;2)$ и $\vec{n} = \{1;-1;1\}$.
21. $P(-2;10;3)$, $A(4;2;2)$ и $\vec{n} = \{2;-1;1\}$.
22. $P(-1;1;5)$, $A(7;4;2)$ и $\vec{n} = \{2;2;5\}$.
23. $P(-4;2;5)$, $A(9;4;6)$ и $\vec{n} = \{-1;2;2\}$.
24. $P(-5;7;5)$, $A(9;7;8)$ и $\vec{n} = \{-1;3;2\}$.
25. $P(3;2;5)$, $A(5;7;2)$ и $\vec{n} = \{-1;3;3\}$.
26. $P(6;7;2)$, $A(8;5;2)$ и $\vec{n} = \{-4;3;5\}$.
27. $P(1;7;6)$, $A(9;6;2)$ и $\vec{n} = \{-5;4;3\}$.

28. $P(0;3;6)$, $A(9;6;7)$ и $\vec{n}=\{-1;1;3\}$.
29. $P(2;3;7)$, $A(5;0;7)$ и $\vec{n}=\{-5;0;12\}$.
30. $P(1;-1;7)$, $A(3;0;-5)$ и $\vec{n}=\{12;0;5\}$.

18. Составьте канонические и параметрические уравнения высоты l, опущенной на плоскость

1. (ABC) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$.
2. (ABD) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(-4;2;6)$, $B(2;-3;0)$, $C(-10;5;8)$, $D(-5;2;-4)$.
3. (ADC) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-4;2;1)$.
4. (DBC) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(2;1;4)$, $B(-1;5;-2)$, $C(-7;-3;2)$, $D(-6;-3;6)$.
5. (OBC) в пирамиде $(OBCD)$, если $B(-6;0;-3)$, $C(3;6;-3)$, $D(-10;6;7)$, $O(0;0;0)$.
6. (OAB) в пирамиде $(OABC)$, если $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $O(0;0;0)$.
7. (OAC) в пирамиде $(OABC)$, если $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $O(0;0;0)$.
8. (OAD) в пирамиде $(OACD)$, если $A(2;-1;-2)$, $C(5;0;-6)$, $D(-10;9;-7)$, $O(0;0;0)$.
9. (ODB) в пирамиде $(OBCD)$, если $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(1;-4;6)$, $O(0;0;0)$.
10. (ODC) в пирамиде $(OBCD)$, если $B(-5;-3;2)$, $C(-2;-6;-3)$, $D(-2;2;-1)$, $O(0;0;0)$.
11. (ABC) в пирамиде $(ABCO)$, если $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $O(0;0;0)$.
12. (ABD) в пирамиде $(ABDO)$, если $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $D(-4;2;5)$, $O(0;0;0)$.
13. (ADC) в пирамиде $(ADCO)$, если $A(1;1;2)$, $C(-2;-2;4)$, $D(-1;0;-2)$, $O(0;0;0)$.
14. (DBC) в пирамиде $(DBCO)$, если $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(7;5;-3)$, $O(0;0;0)$.
15. (OBC) в пирамиде $(OBCA)$, если $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $O(0;0;0)$.
16. (OAB) в пирамиде $(OABD)$, если $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $D(-8;4;-12)$, $O(0;0;0)$.
17. (OAC) в пирамиде $(OACD)$, если $A(-3;4;-7)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$, $O(0;0;0)$.
18. (OAD) в пирамиде $(OADB)$, если $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $D(3;4;5)$, $O(0;0;0)$.
19. (OBD) в пирамиде $(OBDA)$, если $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $D(3;2;-6)$, $O(0;0;0)$.
20. (ODC) в пирамиде $(ODCA)$, если $A(1;-1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(2;-2;-4)$, $O(0;0;0)$.
21. (ABC) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(-3;0;1)$.
22. (ABD) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$, $D(2;1;0)$.
23. (ADC) в пирамиде $(ADCB)$, если $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(0;-6;-4)$.
24. (BCD) в пирамиде $(ABCD)$, если $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$, $D(7;-3;1)$.
25. (OBC) в пирамиде $(OBCD)$, если $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$, $O(0;0;0)$.
26. (OAB) в пирамиде $(OABC)$, если $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$, $O(0;0;0)$.
27. (OAC) в пирамиде $(OACB)$, если $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $O(0;0;0)$.
28. (OAD) в пирамиде $(OADC)$, если $A(-2;-1;-1)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$, $O(0;0;0)$.
29. (OBD) в пирамиде $(OBDC)$, если $B(2;1;-4)$, $C(0;-3;-1)$, $D(-5;2;-8)$, $O(0;0;0)$.
30. (ODC) в пирамиде $(ODCB)$, если $B(5;-6;0)$, $C(-1;3;-3)$, $D(-10;-8;7)$, $O(0;0;0)$.

19. Составьте параметрические и канонические уравнения прямой l, проходящей через точку A

1. параллельно оси Ox, где $A(1;2;4)$.

2. параллельно оси Oy, где $A(3; 6; 4)$.
3. параллельно оси Oz, где $A(-1; 0; -4)$.
4. перпендикулярно плоскости xOy, где $A(3; 8; 7)$.
5. перпендикулярно плоскости xOz, где $A(5; -7; 7)$.
6. перпендикулярно плоскости zOy, где $A(1; -8; 6)$.
7. параллельно оси Ox, где $A(1; 10; 4)$.
8. параллельно оси Oy, где $A(-3; -7; 4)$.
9. параллельно оси Oz, где $A(-9; -3; -4)$.
10. перпендикулярно плоскости xOy, где $A(5; -5; 7)$.
11. перпендикулярно плоскости xOz, где $A(-5; 3; -7)$.
12. перпендикулярно плоскости zOy, где $A(-1; 8; 11)$.
13. параллельно оси Ox, где $A(10; 12; -8)$.
14. параллельно оси Oy, где $A(-3; -6; 17)$.
15. параллельно оси Oz, где $A(-5; 8; 4)$.
16. перпендикулярно плоскости xOy, где $A(13; 5; -7)$.
17. перпендикулярно плоскости xOz, где $A(15; 7; 17)$.
18. перпендикулярно плоскости zOy, где $A(12; -7; 16)$.
19. параллельно оси Ox, где $A(10; 4; -4)$.
20. параллельно оси Oy, где $A(8; 5; -4)$.
21. параллельно оси Oz, где $A(-21; 4; -14)$.
22. перпендикулярно плоскости xOy, где $A(13; -8; 4)$.
23. перпендикулярно плоскости xOz, где $A(15; 7; 17)$.
24. перпендикулярно плоскости zOy, где $A(8; 2; -6)$.
25. параллельно оси Ox, где $A(17; 0; -4)$.
26. параллельно оси Oy, где $A(9; -6; 14)$.
27. параллельно оси Oz, где $A(-7; -9; -4)$.
28. перпендикулярно плоскости xOy, где $A(-3; -5; 4)$.
29. перпендикулярно плоскости xOz, где $A(-5; -17; -7)$.
30. перпендикулярно плоскости zOy, где $A(10; -18; 1)$.

20. Найдите угол между прямыми l_1 и l_2, где

1. $l_1: \ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-6}{-5}$ и $l_2: \begin{cases} x - y + z - 5 = 0; \\ 2x - y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$
2. $l_1: \ \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-4}$ и $l_2: \begin{cases} x - 4y + z - 4 = 0; \\ x - y + z - 9 = 0. \end{cases}$
3. $l_1: \ \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-8}{-3}$ и $l_2: \begin{cases} 3x - y + 2z - 5 = 0; \\ 2x - 2y + 2z - 15 = 0. \end{cases}$
4. $l_1: \ \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+10}{1} = \dfrac{z-9}{3}$ и $l_2: \begin{cases} 3x - y + 2z = 0; \\ x - y + 2z - 19 = 0. \end{cases}$
5. $l_1: \ \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z}{-2}$ и $l_2: \begin{cases} x + z - 5 = 0; \\ -y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

6. $l_1:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{-3}$ и $l_2:\begin{cases} -y-4 &= 0;\\ 3x-4y+5z-1 &= 0.\end{cases}$

7. $l_1:\ \dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y+11}{-3}=\dfrac{z-18}{-5}$ и $l_2:\begin{cases} x+y+z-9 &= 0;\\ 2x+y+2z-3 &= 0.\end{cases}$

8. $l_1:\ \dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y-7}{-1}=\dfrac{z-6}{-5}$ и $l_2:\begin{cases} 2x-y+2z+7 &= 0;\\ x-y-z-15 &= 0.\end{cases}$

9. $l_1:\ \dfrac{x-12}{0}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$ и $l_2:\begin{cases} 3x-3y+3z-7 &= 0;\\ x-y+2z-14 &= 0.\end{cases}$

10. $l_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-18}{0}=\dfrac{z+4}{4}$ и $l_2:\begin{cases} 3x+z-5 &= 0;\\ 2x+2y+2z-7 &= 0.\end{cases}$

11. $l_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-7}{-1}$ и $l_2:\begin{cases} x-y-2 &= 0;\\ x-y+2z-13 &= 0.\end{cases}$

12. $l_1:\ \dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y+12}{-2}=\dfrac{z+9}{1}$ и $l_2:\begin{cases} x+z-15 &= 0;\\ x-y+2z-14 &= 0.\end{cases}$

13. $l_1:\ \dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z-4}{-3}$ и $l_2:\begin{cases} -y+z-25 &= 0;\\ 2x-y+z-41 &= 0.\end{cases}$

14. $l_1:\ \dfrac{x-15}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-1}{-3}$ и $l_2:\begin{cases} x-y-7 &= 0;\\ x-y+3z-1 &= 0.\end{cases}$

15. $l_1:\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$ и $l_2:\begin{cases} -2y+z-25 &= 0;\\ x+3y-2z-5 &= 0.\end{cases}$

16. $l_1:\ \dfrac{x}{8}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-10}{1}$ и $l_2:\begin{cases} x-y+21 &= 0;\\ 2x-y+z-9 &= 0.\end{cases}$

17. $l_1:\ \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} x-y+3z-6 &= 0;\\ -y+z-7 &= 0.\end{cases}$

18. $l_1:\ \dfrac{x-25}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} 4x-y+3z-4 &= 0;\\ 5x-y+z-13 &= 0.\end{cases}$

19. $l_1:\ \dfrac{x-8}{0}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ и $l_2:\begin{cases} 6x+2y+3z-5 &= 0;\\ -8x-y-2z-1 &= 0.\end{cases}$

20. $l_1:\ \dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y+6}{-5}=\dfrac{z+1}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} -3x-6y+7 &= 0;\\ x-3y+z-2 &= 0.\end{cases}$

21. $l_1:\ \dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+14}{-4}=\dfrac{z-1}{3}$ и $l_2:\begin{cases} x-2y+z-3 &= 0;\\ -x-y+z-9 &= 0.\end{cases}$

22. $l_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z+4}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} x-y-42 &= 0;\\ 4x-y+z-4 &= 0.\end{cases}$

23. $l_1:\ \dfrac{x-7}{8}=\dfrac{y-11}{1}=\dfrac{z+8}{0}$ и $l_2:\begin{cases} x-y+3z-21 &= 0;\\ -2y+2z-5 &= 0.\end{cases}$

24. $l_1:\ \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{5}$ и $l_2:\begin{cases} 3x-y+3z+5 &= 0;\\ x+z-9 &= 0.\end{cases}$

25. $l_1:\ \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+18}{2}=\dfrac{z-6}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} 4x-5y+3z-2 &= 0;\\ x-y-14 &= 0.\end{cases}$

26. $l_1:\ \dfrac{x+8}{5}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-6}{-12}$ и $l_2:\begin{cases} 3x+2y+z-9 &= 0;\\ 2x-y+z-19 &= 0.\end{cases}$

27. $l_1:\ \dfrac{x+27}{5}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+6}{-3}$ и $l_2:\begin{cases} 9x+z-15 &= 0;\\ x-y+z-4 &= 0.\end{cases}$

28. $l_1:\ \dfrac{x-16}{12}=\dfrac{y+12}{5}=\dfrac{z-9}{0}$ и $l_2:\begin{cases} 6x-y+4z+2 &= 0;\\ x+z-22 &= 0.\end{cases}$

29. $l_1:\ \dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-9}{-1}$ и $l_2:\begin{cases} 3x-y+3z-8 &= 0;\\ x-y+z-7 &= 0.\end{cases}$

30. $l_1:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{-1}=\dfrac{z-10}{-2}$ и $l_2:\begin{cases} 6x+3z-5 &= 0;\\ 2x-2y+z-7 &= 0.\end{cases}$

21. Найдите расстояние от точки A до прямой l, где

1. $A(1;3;6)$ и $l:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}$.
2. $A(-4;2;6)$ и $l:\ \dfrac{x+10}{5}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z-8}{-12}$.
3. $A(7;2;4)$ и $l:\ \dfrac{x-7}{11}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z+2}{-3}$.
4. $A(2;1;4)$ и $l:\ \dfrac{x+7}{7}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.
5. $A(-1;-5;2)$ и $l:\ \dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{1}$.
6. $A(0;-1;-1)$ и $l:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+6}{6}=\dfrac{z-3}{-3}$.
7. $A(2;5;0)$ и $l:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z}{-1}$.
8. $A(1;2;1)$ и $l:\ \dfrac{x-5}{15}=\dfrac{y}{-9}=\dfrac{z+6}{1}$.
9. $A(-1;7;1)$ и $l:\ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+4}{10}$.
10. $A(-5;-3;2)$ и $l:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z}{3}$.
11. $A(3;0;-3)$ и $l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{0}$.
12. $A(1;2;-1)$ и $l:\ \dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-5}{5}$.
13. $A(-2;-2;4)$ и $l:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-2}{-1}$.
14. $A(6;3;7)$ и $l:\ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-4}$.
15. $A(3;2;1)$ и $l:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z+8}{-3}$.
16. $A(-2;7;3)$ и $l:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-7}$.
17. $A(-5;-2;0)$ и $l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{5}=\dfrac{z+4}{-4}$.

18. $A(2;1;-2)$ и $l: \ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}.$

19. $A(3;2;-6)$ и $l: \ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z}{1}.$

20. $A(2;-2;-4)$ и $l: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}.$

21. $A(-3;0;1)$ и $l: \ \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{2}.$

22. $A(2;1;0)$ и $l: \ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}.$

23. $A(0;-6;-4)$ и $l: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{1}.$

24. $A(7;-3;1)$ и $l: \ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{4}.$

25. $A(0;0;0)$ и $l: \ \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+5}{-2}.$

26. $A(0;1;-1)$ и $l: \ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-5}{9}.$

27. $A(3;-3;1)$ и $l: \ \dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-2}{-3}.$

28. $A(0;0;0)$ и $l: \ \dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-3}.$

29. $A(0;-1;0)$ и $l: \ \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z+4}{-10}.$

30. $A(0;0;0)$ и $l: \ \dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+3}{-5}.$

22. Найдите расстояние между прямыми l_1 и l_2, где

1. $l_1: \ \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-1}{-4}$ и $l_2: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-6}{-5}.$

2. $l_1: \ \dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z}{4}$ и $l_2: \ \dfrac{x+4}{-6}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-6}{2}.$

3. $l_1: \ \dfrac{x-7}{11}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{3}$ и $l_2: \ \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-1}{-3}.$

4. $l_1: \ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{4}$ и $l_2: \ \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-2}{-2}.$

5. $l_1: \ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+5}{11}=\dfrac{z-2}{-5}$ и $l_2: \ \dfrac{x+6}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{1}.$

6. $l_1: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z}{-9}$ и $l_2: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{-3}.$

7. $l_1: \ \dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{0}$ и $l_2: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-4}{3}.$

8. $l_1: \ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$ и $l_2: \ \dfrac{x}{10}=\dfrac{y}{-9}=\dfrac{z}{7}.$

9. $l_1: \ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+4}{10}$ и $l_2: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-1}.$

10. $l_1: \ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ и $l_2: \ \dfrac{x+5}{19}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-2}{3}.$

11. $l_1:\ \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z+3}{-6}$ и $l_2:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$.

12. $l_1:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$ и $l_2:\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$.

13. $l_1:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{-3}$ и $l_2:\ \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{-6}$.

14. $l_1:\ \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-3}$ и $l_2:\ \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{9}$.

15. $l_1:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ и $l_2:\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

16. $l_1:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+7}{-10}$ и $l_2:\ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{5}$.

17. $l_1:\ \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{6}=\dfrac{z+7}{-7}$ и $l_2:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{0}=\dfrac{z+4}{8}$.

18. $l_1:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{4}$ и $l_2:\ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

19. $l_1:\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$ и $l_2:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{-6}=\dfrac{z-1}{1}$.

20. $l_1:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-3}$ и $l_2:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

21. $l_1:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ и $l_2:\ \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{-2}$.

22. $l_1:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{2}$ и $l_2:\ \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

23. $l_1:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-3}$ и $l_2:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z+4}{2}$.

24. $l_1:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$ и $l_2:\ \dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z-4}{-3}$.

25. $l_1:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ и $l_2:\ \dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y-10}{7}=\dfrac{z+1}{4}$.

26. $l_1:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{1}$ и $l_2:\ \dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-2}{-6}$.

27. $l_1:\ \dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ и $l_2:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z}{-1}$.

28. $l_1:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$ и $l_2:\ \dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z+4}{-7}$.

29. $l_1:\ \dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+8}{8}$ и $l_2:\ \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+4}{-3}$.

30. $l_1:\ \dfrac{x-5}{15}=\dfrac{y+6}{2}=\dfrac{z}{-7}$ и $l_2:\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+3}{3}$.

23. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α и угол между ними, где

1. $l:\ \dfrac{x-13}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+10}{-3}$ и $\alpha:\ 2x+3y+z-7=0$.

2. $l:\ \dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{-8}$ и $\alpha:\ 5x+3y+z-3=0$.

3. $l:\ \dfrac{x-4}{-12}=\dfrac{y+3}{-6}=\dfrac{z-3}{8}$ и $\alpha:\ 7x+2y-3z-73=0.$

4. $l:\ \dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z}{2}$ и $\alpha:\ -3x+3y+4z-15=0.$

5. $l:\ \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ и $\alpha:\ 2x+3y-8z+8=0.$

6. $l:\ \dfrac{x+3}{-9}=\dfrac{y-20}{18}=\dfrac{z+18}{-15}$ и $\alpha:\ 7x+y+2z-63=0.$

7. $l:\ \dfrac{x+18}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+6}{4}$ и $\alpha:\ 3x+11y-2z+34=0.$

8. $l:\ \dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-10}{2}=\dfrac{z-17}{3}$ и $\alpha:\ 7x+2y-3z-19=0.$

9. $l:\ \dfrac{x-13}{1}=\dfrac{y+23}{-5}=\dfrac{z-4}{1}$ и $\alpha:\ 5x-9y+3z-19=0.$

10. $l:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y+26}{-6}=\dfrac{z+10}{-3}$ и $\alpha:\ 2x+y-4z+8=0.$

11. $l:\ \dfrac{x-6}{0}=\dfrac{y-34}{5}=\dfrac{z-3}{2}$ и $\alpha:\ 4x+2y+z-23=0.$

12. $l:\ \dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-13}{-5}$ и $\alpha:\ x+y+5z-45=0.$

13. $l:\ \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-19}{3}$ и $\alpha:\ 7x+7y-z+28=0.$

14. $l:\ \dfrac{x-25}{3}=\dfrac{y-44}{5}=\dfrac{z+8}{-1}$ и $\alpha:\ -4x+5y+4z-16=0.$

15. $l:\ \dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y}{9}=\dfrac{z+7}{-2}$ и $\alpha:\ 6x+2y-z-37=0.$

16. $l:\ \dfrac{x+6}{-5}=\dfrac{y+17}{-9}=\dfrac{z+4}{-4}$ и $\alpha:\ 6x-9y-z+44=0.$

17. $l:\ \dfrac{x-24}{2}=\dfrac{y-9}{1}=\dfrac{z-11}{1}$ и $\alpha:\ 9x+3y+4z+13=0.$

18. $l:\ \dfrac{x+7}{-8}=\dfrac{y-24}{14}=\dfrac{z+24}{-13}$ и $\alpha:\ 6x-5y-3z+11=0.$

19. $l:\ \dfrac{x-12}{9}=\dfrac{y-12}{10}=\dfrac{z-12}{6}$ и $\alpha:\ -5x+3y-4z+33=0.$

20. $l:\ \dfrac{x-28}{6}=\dfrac{y-14}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ и $\alpha:\ x+3y+6z-16=0.$

21. $l:\ \dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y+9}{-7}=\dfrac{z+14}{-5}$ и $\alpha:\ x+2y+9z-44=0.$

22. $l:\ \dfrac{x-15}{5}=\dfrac{y+7}{-5}=\dfrac{z+27}{-12}$ и $\alpha:\ 8x+4y-z-23=0.$

23. $l:\ \dfrac{x+9}{8}=\dfrac{y+16}{10}=\dfrac{z+19}{11}$ и $\alpha:\ 5x+2y-6z-31=0.$

24. $l:\ \dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y+19}{-10}=\dfrac{z+3}{-4}$ и $\alpha:\ -2x+2y+5z+3=0.$

25. $l:\ \dfrac{x-34}{9}=\dfrac{y+29}{-7}=\dfrac{z-16}{6}$ и $\alpha:\ 6x+y-2z-3=0.$

26. $l:\ \dfrac{x-13}{6}=\dfrac{y-25}{12}=\dfrac{z}{1}$ и $\alpha:\ x+y-2z-22=0.$

27. $l:\ \dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y-11}{5}=\dfrac{z-1}{0}$ и $\alpha:\ 5x-3y+2z+16=0.$
28. $l:\ \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+29}{-13}=\dfrac{z-13}{8}$ и $\alpha:\ 2x+2y-z-33=0.$
29. $l:\ \dfrac{x+19}{3}=\dfrac{y+6}{1}=\dfrac{z-6}{0}$ и $\alpha:\ -2x+y+4z-36=0.$
30. $l:\ \dfrac{x-15}{4}=\dfrac{y+22}{-5}=\dfrac{z-16}{6}$ и $\alpha:\ x+2y+7z+61=0.$

24. Найдите точку Q, симметричную точке P относительно плоскости α, где

1. $P(8;5;-5)$ и $\alpha:\ 2x+y-z-2=0.$
2. $P(10;22;-20)$ и $\alpha:\ 3x+8y-9z-78=0.$
3. $P(19;28;4)$ и $\alpha:\ 4x+9y+2z-33=0.$
4. $P(-15;1;11)$ и $\alpha:\ 5x+y-4z-8=0.$
5. $P(5;14;-20)$ и $\alpha:\ 2x+6y-9z-32=0.$
6. $P(-11;-9;-37)$ и $\alpha:\ x+3y+7z+2=0.$
7. $P(-10;-7;6)$ и $\alpha:\ 2x+3y-2z-15=0.$
8. $P(-6;0;28)$ и $\alpha:\ 2x+2y-9z-3=0.$
9. $P(-6;-7;16)$ и $\alpha:\ x+y-9z-9=0.$
10. $P(7;2;4)$ и $\alpha:\ 3x+y+z-5=0.$
11. $P(-3;-1;12)$ и $\alpha:\ 2x+y-7z-17=0.$
12. $P(-17;-16;-8)$ и $\alpha:\ 3x+2y+2z+14=0.$
13. $P(-17;-27;-4)$ и $\alpha:\ 4x+8y+z+45=0.$
14. $P(-15;8;-22)$ и $\alpha:\ 5x-3y+8z-19=0.$
15. $P(13;8;-8)$ и $\alpha:\ 5x+2y-z-29=0.$
16. $P(-13;-24;15)$ и $\alpha:\ 9x+8y-9z-234=0.$
17. $P(0;-14;19)$ и $\alpha:\ x+2y-10z+8=0.$
18. $P(12;-2;-8)$ и $\alpha:\ 8x+2y-5z+54=0.$
19. $P(31;21;-7)$ и $\alpha:\ 2x-y-z-78=0.$
20. $P(-10;-1;3)$ и $\alpha:\ 3x-y-2z+7=0.$
21. $P(16;9;-16)$ и $\alpha:\ 3x+3y-5z-26=0.$
22. $P(-4;-12;-18)$ и $\alpha:\ 2x+9y+10z-74=0.$
23. $P(-23;21;10)$ и $\alpha:\ 6x-5y-3z-7=0.$
24. $P(-27;-26;8)$ и $\alpha:\ 8x+8y-3z+37=0.$
25. $P(-12;-11;26)$ и $\alpha:\ 3x+3y-7z-17=0.$
26. $P(-11;0;12)$ и $\alpha:\ 6x+y-7z-22=0.$
27. $P(-10;-10;20)$ и $\alpha:\ 3x+2y-9z+42=0.$
28. $P(10;5;12)$ и $\alpha:\ 4x+y+7z+3=0.$
29. $P(5;10;-11)$ и $\alpha:\ 5x+2y-7z+34=0.$
30. $P(-2;-14;9)$ и $\alpha:\ 3x+3y-5z+7=0.$

25. Найдите точку Q, симметричную точке P относительно прямой l, где

1. $P(2;3;5)$ и $l: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{-1}$.
2. $P(3;-1;6)$ и $l: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+10}{-7}$.
3. $P(0;7;6)$ и $l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+8}{1} = \dfrac{z-29}{-8}$.
4. $P(5;-9;4)$ и $l: \dfrac{x+18}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-29}{-3}$.
5. $P(0;6;-3)$ и $l: \dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+10}{1}$.
6. $P(6;-7;8)$ и $l: \dfrac{x+13}{1} = \dfrac{y-10}{0} = \dfrac{z-29}{-11}$.
7. $P(2;-4;9)$ и $l: \dfrac{x+8}{8} = \dfrac{y-13}{-6} = \dfrac{z+30}{41}$.
8. $P(9;-9;5)$ и $l: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+8}{1} = \dfrac{z-18}{-7}$.
9. $P(1;-2;5)$ и $l: \dfrac{x+9}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-99}{31}$.
10. $P(3;-2;11)$ и $l: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+38}{-24}$.
11. $P(-20;10;0)$ и $l: \dfrac{x-8}{9} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-90}{46}$.
12. $P(3;-2;7)$ и $l: \dfrac{x+8}{1} = \dfrac{y-10}{0} = \dfrac{z-34}{-4}$.
13. $P(1;-15;11)$ и $l: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-42}{-15}$.
14. $P(5;-4;3)$ и $l: \dfrac{x+14}{1} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-82}{-20}$.
15. $P(6;-7;12)$ и $l: \dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+53}{16}$.
16. $P(10;6;-5)$ и $l: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$.
17. $P(15;-3;-5)$ и $l: \dfrac{x+11}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z+104}{25}$.
18. $P(3;-7;2)$ и $l: \dfrac{x+15}{10} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+51}{26}$.
19. $P(8;8;1)$ и $l: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-146}{-36}$.
20. $P(1;-3;4)$ и $l: \dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-23}{-5}$.
21. $P(3;14;3)$ и $l: \dfrac{x+19}{1} = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{z+204}{26}$.
22. $P(8;-7;9)$ и $l: \dfrac{x+15}{7} = \dfrac{y-11}{-2} = \dfrac{z-190}{-91}$.

23. $P(0;-8;7)$ и $l: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-64}{-14}$.

24. $P(2;-3;5)$ и $l: \dfrac{x+6}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-110}{-26}$.

25. $P(11;-7;3)$ и $l: \dfrac{x+10}{2}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z+63}{17}$.

26. $P(7;8;3)$ и $l: \dfrac{x-6}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-11}{-3}$.

27. $P(20;7;5)$ и $l: \dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-12}{1}=\dfrac{z-70}{16}$.

28. $P(6;4;9)$ и $l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-5}$.

29. $P(1;-5;10)$ и $l: \dfrac{x+12}{-3}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-53}{11}$.

30. $P(0;-3;4)$ и $l: \dfrac{x+13}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-33}{-7}$.

Таблица вариантов

В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	15	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	6	9	17	26	9
2	17	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	14	10	4	9	24
3	28	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	25	14	5	21	23
4	18	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	6	9	17	26	9
5	10	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	14	10	4	9	24
6	2	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	18	3	14	5	18
7	22	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	19	13	14	28	18
8	11	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	30	12	24	7	20
9	6	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	25	14	5	21	23
10	4	9	9	27	8	29	28	17	20	17	5	14	10	19	8	21	28	1	12	29	9	9	27	8	29
11	16	10	1	12	26	21	7	17	23	21	21	19	23	3	8	5	7	29	24	22	1	12	26	21	7
12	12	14	1	12	16	6	11	23	14	29	9	4	30	15	26	29	19	13	3	17	18	3	14	5	18
13	23	28	23	16	5	18	27	14	25	5	13	27	4	10	22	5	23	24	4	14	30	12	24	7	20
14	2	27	21	22	22	14	13	26	27	20	9	2	7	9	9	26	10	23	2	28	9	9	27	8	29
15	18	12	12	22	24	4	14	9	16	3	3	21	24	14	7	3	27	17	13	12	19	13	14	28	18
16	11	6	9	27	7	13	26	21	25	15	17	30	12	14	28	16	21	5	4	23	1	12	26	21	7
17	8	8	3	6	12	10	5	30	3	4	22	21	27	28	30	29	9	9	19	27	9	9	27	8	29
18	12	9	19	2	3	28	16	20	29	3	19	23	10	13	30	18	19	15	23	19	3	28	16	20	29
19	7	8	1	20	16	19	21	16	18	11	20	24	21	12	12	5	13	25	8	15	12	9	19	2	3
20	14	3	5	4	2	21	13	21	28	17	11	29	3	8	14	17	27	29	28	29	30	12	24	7	20
21	26	14	1	7	23	17	19	21	7	14	30	27	11	26	20	11	24	26	8	27	1	12	26	21	7
22	8	3	28	16	20	29	29	18	29	2	11	14	21	8	22	3	9	15	21	14	22	3	28	16	20
23	5	22	28	6	8	22	1	1	18	6	15	25	29	7	24	14	25	18	27	11	3	28	16	20	29
24	23	22	19	27	27	4	20	14	23	29	17	2	27	11	29	9	1	13	4	14	19	13	14	28	18
25	22	22	29	15	23	5	3	9	13	11	10	13	12	2	18	25	29	25	19	29	3	28	16	20	29
26	20	28	23	19	23	21	14	30	26	26	23	28	12	23	9	7	20	13	25	25	22	29	15	23	3
27	16	12	9	15	13	11	19	18	29	4	15	30	4	7	25	12	8	15	2	8	28	23	19	23	21
28	20	26	19	25	27	15	8	21	10	19	20	15	22	18	2	30	25	12	25	17	3	28	16	20	29
29	20	8	15	23	30	9	30	24	6	2	30	12	11	14	6	21	24	25	3	30	3	28	16	20	29
30	13	10	11	15	17	23	1	22	19	23	8	10	24	2	3	29	25	14	20	28	22	29	15	23	5
31	29	5	5	13	16	9	7	21	26	21	9	24	23	19	10	1	3	20	4	21	28	23	19	23	21
32	5	30	14	23	16	6	25	30	4	11	24	19	23	13	6	28	9	14	24	3	25	4	13	13	14
33	19	17	27	19	28	16	14	30	13	30	5	27	11	2	4	18	5	17	3	11	22	29	15	23	12
34	21	22	7	21	6	1	2	17	4	21	1	4	20	3	24	30	21	5	23	5	28	23	19	23	21
35	12	8	23	15	2	25	4	13	13	14	5	14	4	28	16	25	19	18	5	6	29	13	18	9	17
36	8	29	13	18	9	17	14	6	24	2	10	5	4	27	9	4	19	21	25	12	10	13	11	11	26
37	15	11	26	20	5	4	28	25	18	6	1	21	6	19	28	10	4	5	27	7	21	25	12	10	13
38	13	21	10	14	2	1	24	28	12	5	9	26	13	23	14	30	2	9	17	18	25	4	13	13	14
39	7	2	2	8	20	23	10	22	19	29	15	26	6	11	24	3	18	18	25	26	29	13	18	9	17
40	28	15	10	13	11	11	26	28	25	30	12	30	26	10	5	17	14	21	3	2	10	13	11	11	26
41	2	21	30	17	2	14	9	26	16	26	24	2	15	10	5	7	11	20	24	10	21	25	12	10	13
42	23	11	1	8	13	1	15	20	8	18	18	16	5	30	7	18	7	10	15	7	29	13	18	9	17
43	8	29	10	7	29	17	20	28	21	15	16	4	14	1	23	8	30	4	29	17	10	13	11	11	26
44	16	25	15	16	30	6	21	20	1	21	20	17	13	14	4	15	25	25	2	20	25	4	13	13	14
45	9	30	2	20	9	30	18	1	5	11	7	12	1	22	6	14	17	17	7	22	21	25	12	10	13
46	20	21	24	8	20	2	20	22	20	21	14	13	26	30	8	12	3	20	19	2	8	20	2	20	22
47	2	13	21	9	6	12	15	25	21	8	20	21	20	23	15	6	16	1	29	3	23	19	16	8	20
48	20	22	10	26	1	26	20	6	22	25	20	15	15	30	5	3	19	19	20	2	15	15	18	27	21
49	20	29	9	28	24	14	5	26	1	10	9	28	19	3	8	17	21	3	2	29	23	11	1	8	13
50	26	14	24	13	7	9	17	2	24	10	18	2	13	21	18	6	8	13	13	4	23	19	16	8	20
51	14	26	6	30	8	29	21	13	1	15	26	20	10	29	2	22	28	24	6	26	15	15	18	27	21
52	16	12	29	8	29	6	27	19	20	13	22	19	14	14	10	26	14	17	23	11	8	20	2	20	22
53	24	21	16	10	11	29	18	23	23	24	12	20	29	15	6	24	15	15	18	27	21	25	12	10	13
54	15	5	19	22	26	22	23	10	28	4	11	1	20	8	30	23	6	16	4	18	23	19	16	8	20
55	8	15	15	2	16	15	16	21	15	21	24	11	14	23	28	23	10	14	9	9	23	11	1	8	13
56	7	20	8	16	22	27	16	3	3	11	26	23	19	18	18	14	10	21	23	26	14	26	6	30	8
57	17	22	16	16	15	19	6	13	10	17	1	9	16	3	9	26	23	17	24	7	8	20	2	20	22
58	29	16	5	9	28	30	7	3	27	19	28	28	15	13	30	29	10	27	29	4	15	15	18	27	21
59	13	3	3	1	15	29	15	30	8	13	29	3	7	8	20	10	2	22	28	15	23	11	1	8	13
60	9	27	20	21	16	17	1	30	13	14	27	28	25	10	2	15	12	23	19	16	8	20	2	20	22

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
61	30	3	24	22	29	23	28	29	23	21	25	27	13	2	13	6	25	17	14	8	14	26	6	30	8
62	2	13	23	19	11	6	20	9	15	5	27	27	19	17	21	7	27	8	17	4	29	22	20	6	9
63	10	22	14	19	23	22	5	14	6	21	7	13	23	22	19	18	5	26	28	29	23	11	1	8	13
64	7	12	14	6	15	17	26	22	25	21	27	27	20	29	20	23	27	20	23	26	15	2	16	15	16
65	3	21	28	4	1	8	22	30	2	4	27	22	19	1	17	4	23	21	22	7	30	11	23	11	1
66	23	9	10	3	21	12	24	13	25	20	26	21	29	17	21	26	28	24	10	13	20	8	1	27	13
67	23	23	17	8	8	2	24	30	17	18	11	28	12	4	2	6	7	10	20	23	23	14	6	10	19
68	6	20	16	9	14	1	29	27	1	25	5	15	11	21	14	5	9	22	26	10	4	21	21	13	19
69	21	11	14	26	11	18	18	5	18	25	23	23	21	22	1	24	26	18	9	3	1	2	4	12	11
70	13	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	19	17	11	24	21
71	27	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	10	19	30	4	13
72	25	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	4	28	6	18	23
73	22	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	8	5	30	1	15
74	8	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	3	9	8	20	15
75	13	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	9	14	3	14	3
76	24	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	27	9	11	15	14
77	6	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	3	9	8	20	15
78	17	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	9	14	3	14	3
79	22	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	4	21	21	13	19
80	10	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	3	9	8	20	15
81	15	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	27	9	11	15	14
82	17	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	4	28	6	18	23
83	28	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	29	22	20	6	9
84	18	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	9	14	3	14	3
85	10	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	15	2	16	15	16
86	2	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	30	11	23	11	1
87	22	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	20	8	1	27	13
88	11	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	23	14	6	10	19
89	6	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	3	9	8	20	15
90	27	16	4	5	19	9	20	28	22	11	14	8	11	23	9	23	9	21	12	10	1	2	4	12	11
91	3	9	14	3	14	3	16	29	20	8	17	5	29	28	27	22	1	15	14	10	19	17	11	24	21
92	3	22	16	11	9	17	21	23	18	28	13	29	23	4	17	9	17	3	11	6	10	19	30	4	13
93	28	8	24	5	5	8	9	10	19	9	4	8	28	19	14	18	23	2	4	20	27	9	11	15	14
94	2	15	12	27	27	5	14	11	12	15	5	19	20	11	20	22	12	21	8	11	8	5	30	1	15
95	10	1	5	12	14	29	20	7	18	22	29	18	3	8	6	2	24	5	26	1	23	11	1	8	13
96	19	27	27	9	11	15	14	23	6	20	5	17	1	18	21	21	13	26	1	3	4	13	27	17	1
97	18	25	26	16	22	12	9	11	16	13	22	24	2	28	23	8	17	7	12	10	27	9	11	15	14
98	17	1	16	26	9	14	17	9	12	7	11	16	20	23	7	10	11	7	18	26	27	5	14	11	12
99	7	1	6	2	25	19	15	2	18	4	5	18	12	18	5	22	24	16	8	20	18	3	13	1	22
100	18	3	18	5	23	16	19	3	18	7	13	25	1	18	26	20	5	3	14	19	9	10	19	9	4
101	5	13	16	7	4	5	15	3	29	10	10	15	15	22	26	20	2	11	15	26	18	3	13	1	22
102	16	13	23	26	2	17	2	3	24	8	8	2	16	10	16	21	6	18	9	12	4	13	27	17	1
103	9	25	21	13	12	16	24	22	1	13	15	4	5	21	10	11	27	20	16	21	4	28	6	18	23
104	29	23	14	6	10	19	28	16	23	9	29	5	4	15	16	5	2	19	1	29	27	5	14	11	12
105	24	25	24	2	7	16	28	12	15	10	18	13	20	3	5	24	17	13	1	10	18	3	13	1	22
106	6	16	18	3	13	1	22	6	20	20	20	18	8	25	28	8	13	23	5	25	4	13	27	17	1
107	29	4	21	21	13	19	23	8	23	16	18	7	22	12	24	4	13	12	15	14	30	11	23	11	1
108	7	13	26	13	20	8	1	27	13	5	24	10	29	2	28	14	16	17	9	8	20	8	1	27	13
109	18	16	20	23	25	17	21	3	13	16	11	6	19	10	25	13	3	24	3	23	23	14	6	10	19
110	13	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	4	21	21	13	19
111	27	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	1	2	4	12	11
112	25	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	19	17	11	24	21
113	22	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	10	19	30	4	13
114	8	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	4	28	6	18	23
115	13	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	29	22	20	6	9
116	24	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	23	11	1	8	13
117	6	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	15	2	16	15	16
118	17	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	4	21	21	13	19
119	22	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	8	5	30	1	15
120	10	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	19	17	11	24	21